

**PIANO DI INFORMAZIONE E  
FORMAZIONE SULL'INDAGINE OCSE-PISA  
E ALTRE RICERCHE NAZIONALI E  
INTERNAZIONALI**

*Il Quadro di Riferimento per la Matematica*

**Giorgio Bolondi**

*Alma Mater Studiorum-Università di Bologna*

*Terrasini, 25 ottobre 2011*

Quadri di Riferimento:  
*quale* matematica viene  
valutata e  
*come* viene valutata



Uno strumento in evoluzione



INVALSI



Programme for International Student Assessment

***Da PISA  
2003***

***a PISA 2012***

■ **Competenza matematica (*Mathematical Literacy*)**

La competenza matematica è la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo reale, di operare valutazioni fondate e di utilizzare la matematica e confrontarsi con essa in modi che rispondono alle esigenze della vita di quell'individuo in quanto cittadino che esercita un ruolo costruttivo, impegnato e basato sulla riflessione.

*Mathematical Literacy in PISA  
2003*

## *Competenza matematica (Mathematical literacy)*

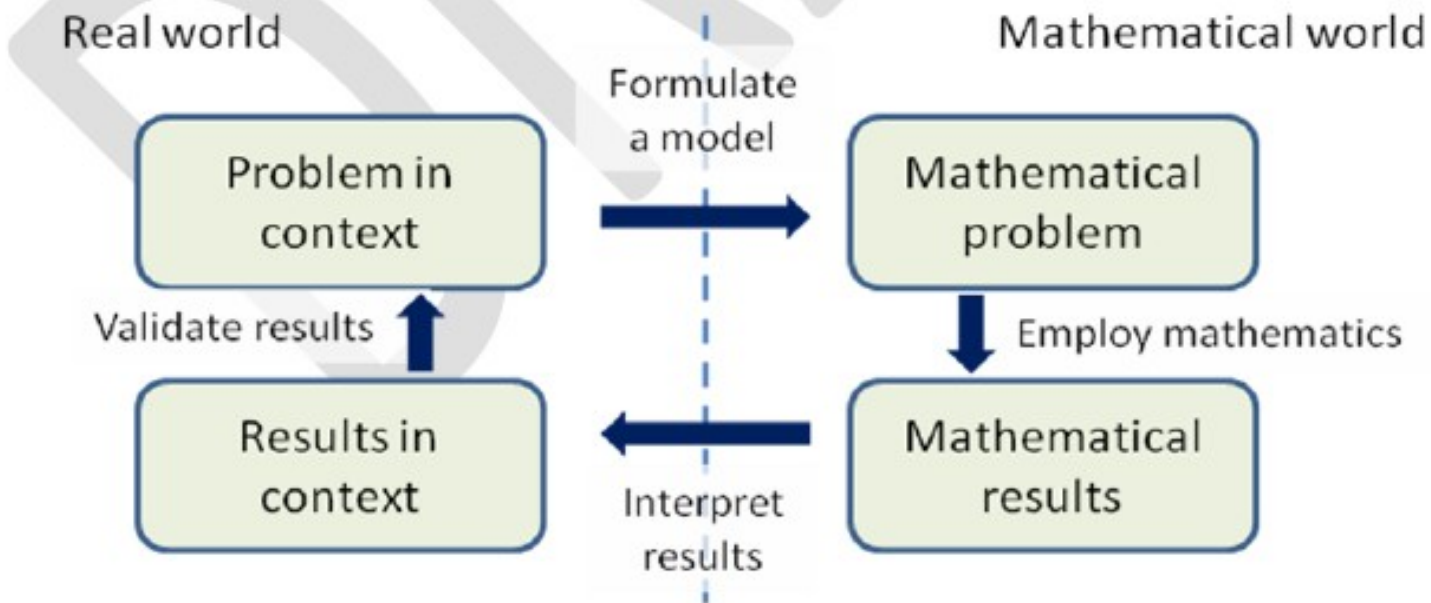
La competenza matematica è la capacità di un individuo di formulare, utilizzare e interpretare la matematica in una varietà di contesti. Include la capacità di ragionare matematicamente e di usare concetti, procedure, fatti e strumenti della matematica per descrivere, spiegare e predire fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica ha nel mondo e a formulare giudizi e decisioni ben fondati, come richiesto a cittadini costruttivi, impegnati e riflessivi.

*Mathematical Literacy in PISA  
2012*

Il ciclo della modellizzazione matematica, usato nei precedenti quadri di riferimento per descrivere le fasi attraverso le quali gli individui risolvono problemi in contesto, rimane una delle caratteristiche chiave del quadro di riferimento di PISA 2012.

E' utilizzato per aiutare a definire i *processi* matematici in cui gli studenti sono impegnati quando risolvono problemi, **processi che per la prima volta nel 2012 saranno usati come dimensione primaria di restituzione dei risultati.**

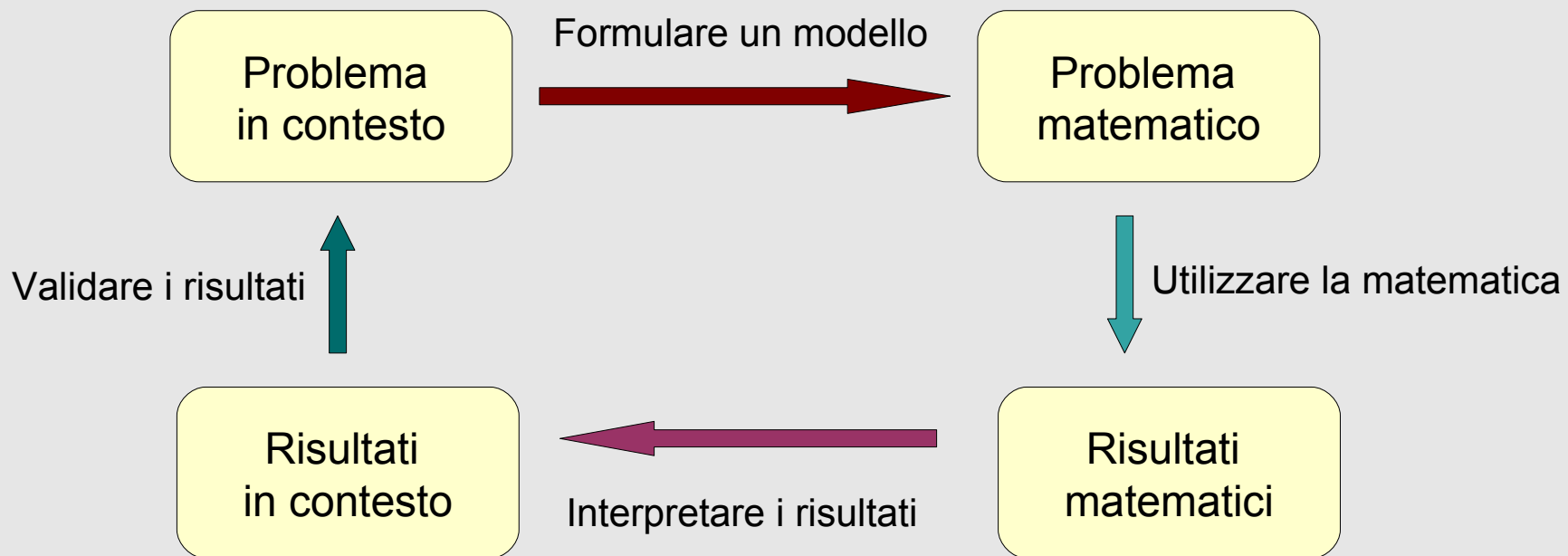
# Mathematical literacy in practice





Mondo reale

Mondo matematico



I termini utilizzati nella definizione di *competenza matematica* mettono l'accento sul coinvolgimento attivo nel fare matematica, e vuole comprendere il ragionare matematicamente e l'usare concetti, procedure, fatti e strumenti della matematica nel descrivere, spiegare e predire fenomeni

I verbi

***‘formulare’\****  
***‘utilizzare’***  
***‘interpretare’***

si riferiscono ai tre processi in cui gli studenti saranno impegnati in quanto solutori attivi di problemi

\* “formulare” significa anche *impostare*

***Formulare***  
matematica riguarda  
l'identificare le opportunità  
di applicare e usare la matematica,  
riconoscendo quale matematica  
può essere utilizzata per comprendere  
o risolvere un problema

Include l'essere capace di prendere una situazione così come è presentata e di trasformarla in una forma suscettibile di essere trattata matematicamente, dandole una struttura matematica e una rappresentazione adeguata, identificando le variabili e facendo le ipotesi semplificative che aiutano a risolvere il problema o rispondere alla consegna.

***Applicare***  
la matematica riguarda  
il mettere in campo ragionamenti matematici  
e l'utilizzare i concetti, le procedure,  
i fatti e gli strumenti della matematica  
per trovare una soluzione matematica

Include l'eseguire calcoli,  
il manipolare espressioni algebriche,  
equazioni o altri modelli matematici,  
l'analizzare matematicamente informazioni  
da diagrammi o grafici, l'elaborare descrizioni  
matematiche e spiegazioni,  
l'usare strumenti matematici  
per risolvere problemi.

***Interpretare*** la matematica  
riguarda il riflettere sulle soluzioni  
o i risultati matematici e interpretarli  
nel contesto di un problema  
o di una richiesta



Include il valutare le soluzioni  
o le argomentazioni matematiche  
in relazione al contesto del problema  
e il determinare se i risultati  
sono ragionevoli e sensati  
in quella situazione

La persona di fronte a un problema  
cerca di identificare quale matematica  
è rilevante in quella situazione problematica  
e formula la situazione matematicamente  
coerentemente con i concetti e le relazioni identificate  
e le ipotesi semplificatrici fatte

Il ragazzo che deve risolvere un problema trasforma il “problema in contesto” in un “problema matematico” suscettibile di essere trattato matematicamente

**D17.** La formula  $L = L_0 + K \times P$  esprime la lunghezza  $L$  di una molla al variare del peso  $P$  applicato.  $L_0$  rappresenta la lunghezza in centimetri “a riposo” della molla;  $K$  indica di quanto si allunga in centimetri la molla quando le si applica una unità di peso.

Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione:

*“È una molla molto corta e molto dura (cioè molto resistente alla trazione)”?*

- A.  $L = 10 + 0,5 \times P$
- B.  $L = 10 + 7 \times P$
- C.  $L = 80 + 0,5 \times P$
- D.  $L = 80 + 7 \times P$

Relazioni e funzioni	D17	4,0	58,3	25,4	7,9	4,3
----------------------	-----	-----	------	------	-----	-----

**D24.** La formula  $l = l_0 + k \cdot P$  esprime la lunghezza  $l$  di una molla al variare del peso  $P$  applicato.  $l_0$  rappresenta la lunghezza in centimetri “a riposo” della molla;  $k$  indica di quanto si allunga in centimetri la molla quando si applica una unità di peso. Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione: “È una molla molto lunga e molto resistente alla trazione”?

- A.  $l = 15 + 0,5 \cdot P$
- B.  $l = 75 + 7 \cdot P$
- C.  $l = 70 + 0,01 \cdot P$
- D.  $l = 60 + 6 \cdot P$

Relazioni e funzioni	D24	11,8	8,1	33,2	38,1	8,9
----------------------	-----	------	-----	------	------	-----

I quattro ambiti  
di contenuti

*Cambiamenti e relazioni*  
*Spazio e forma*  
*Quantità*  
*Incertezza e dati*

**MATEMATICA: PROVA 12**  
**CONCERTO ROCK**

---

**Matematica: esempio 12.1**

In occasione di un concerto rock, è stato riservato per gli spettatori un campo rettangolare di 100 m per 50 m. Il concerto ha registrato il tutto esaurito e il campo era pieno di *fans*, tutti in piedi.

Fra i seguenti numeri, quale fornisce la stima più attendibile del numero totale di spettatori?

- A. 2.000
- B. 5.000
- C. 20.000
- D. 50.000
- E. 100.000

**D23. Le dimensioni di una piazza rettangolare di una grande città sono circa  $620 \text{ m} \times 120 \text{ m}$ . Le stime comparse sui giornali sul numero di partecipanti a una manifestazione che ha riempito la piazza variano da 100 000 a oltre 1 000 000.**

**a. Sapendo che diverse fotografie scattate durante la manifestazione evidenziano una densità di circa 4 persone al metro quadro, che cosa si può concludere circa l'effettivo numero dei partecipanti?**

- A. Le stime dei giornali sono tutte errate perché dalle informazioni disponibili i partecipanti non potevano essere più di 20 000.
- B. Una stima ragionevole è di circa 300 000 partecipanti.
- C. Ha ragione chi ha parlato di più di un milione di partecipanti.
- D. La piazza non può contenere molte persone più di uno stadio, quindi c'erano meno di 150 000 partecipanti.



Numeri	D23_a	17,6	18,9	46,3	7,1	10,0
--------	-------	------	------	------	-----	------

b. **Mostra i calcoli che hai fatto per trovare la risposta.**

.....  
.....

Numeri	D23_b	43,6	21,6	34,8
--------	-------	------	------	------

**Relazioni tra i processi  
matematici (riga orizzontale in alto)  
e capacità matematiche  
(prima colonna a sinistra)**

*Nota: questa fondamentale tabella è lasciata nel testo originale inglese della bozza del Quadro di Riferimento per non anticipare una traduzione che potrebbe discostarsi da quella ufficiale*

	<i>Formulating situations mathematically</i>	<i>Employing mathematical concepts, facts, procedures, and reasoning</i>	<i>Interpreting, applying, and evaluating mathematical outcomes</i>
<b>Communicating</b>	Read, decode, and make sense of statements, questions, tasks, objects, images, or animations (in computer-based assessment) in order to form a mental model of the situation	Articulate a solution, show the work involved in reaching a solution and/or summarize and present intermediate mathematical results	Construct and communicate explanations and arguments in the context of the problem
<b>Mathematizing</b>	Identify the underlying mathematical variables and structures in the real world problem, and make assumptions so that they can be used	Conceptualize the problem mathematically or interpret the solution within the context of the original problem (may be needed in problems whose major emphasis is on <i>employing</i> )	Understand the extent and limits of a mathematical solution that are a consequence of the mathematical model employed.

	<i>Formulating situations mathematically</i>	<i>Employing mathematical concepts, facts, procedures, and reasoning</i>	<i>Interpreting, applying, and evaluating mathematical outcomes</i>
<b>Representation</b>	Represent <sup>4</sup> real-world information mathematically	Make sense of, relate, and use a variety of representations when interacting with a problem	Interpret mathematical outcomes in a variety of formats in relation to a situation or use; compare or evaluate two or more representations in relation to a situation
<b>Reasoning and argument</b>	Explain, defend, or provide a justification for the identified or devised representation of a real-world situation	<p>Explain, defend, or provide a justification for the processes and procedures used to determine a mathematical result or solution</p> <p>Connect pieces of information to arrive at a mathematical solution, make generalizations, or create a multi-step argument</p>	Reflect on mathematical solutions and create explanations and arguments that support, refute, or qualify a mathematical solution to a contextualized problem

	<i>Formulating situations mathematically</i>	<i>Employing mathematical concepts, facts, procedures, and reasoning</i>	<i>Interpreting, applying, and evaluating mathematical outcomes</i>
<b>Devising strategies for solving problems</b>	Select or devise a plan or strategy to mathematically reframe contextualized problems	Activate effective and sustained control mechanisms across a multi-step procedure leading to a mathematical solution, conclusion, or generalization	Devise and implement a strategy in order to interpret, evaluate, and validate a mathematical solution to a contextualized problem
<b>Using symbolic, formal and technical language and operations</b>	Use appropriate variables, symbols, diagrams, and standard models in order to represent a real-world problem using symbolic/formal language	Understand and utilize formal constructs based on definitions, rules and formal systems as well as employing algorithms	Understand the relationship between the context of the problem and representation of the mathematical solution. Use this understanding to help interpret the solution in context and gauge the feasibility and possible limitations of the solution

	<i>Formulating situations mathematically</i>	<i>Employing mathematical concepts, facts, procedures, and reasoning</i>	<i>Interpreting, applying, and evaluating mathematical outcomes</i>
<b>Using mathematical tools</b>	Use mathematical tools <sup>5</sup> in order to recognize mathematical structures or to portray mathematical relationships	Know about and be able to make appropriate use of various tools that may assist in implementing processes and procedures for determining mathematical solutions	Use mathematical tools to ascertain the reasonableness of a mathematical solution and any limits and constraints on that solution, given the context of the problem

**D13.** L'insegnante di inglese dà ai suoi studenti un test formato da 25 domande e spiega che il punteggio totale  $p$  è calcolato assegnando 4 punti per ogni risposta esatta e togliendo 2 punti per ogni risposta sbagliata o mancante.

a. Il punteggio massimo possibile è .....

b. Scrivi la formula che fornisce il punteggio  $p$  complessivo, indicando con  $n$  il numero di risposte esatte.

$$p = \dots\dots\dots$$

c. Se la sufficienza si ottiene con più di 60 punti, qual è il numero minimo di domande al quale occorre rispondere correttamente per avere la sufficienza?

Risposta: .....

Relazioni e funzioni	D13 a	5,0	6,0	89,0
Relazioni e funzioni	D13 b	19,3	72,7	8,0
Relazioni e funzioni	D13 c	10,2	78,5	11,3

**D11.** La relazione seguente esprime la spesa annuale per l'automobile, composta da una parte fissa e da una parte proporzionale al numero di km percorsi:

$$S = F + c \cdot k$$

dove  $F$  sono le spese fisse,  $c$  è il costo al km e  $k$  è il numero di km percorsi.

Nella tabella sono riportate le spese fisse e il costo al km per alcuni tipi di automobile.

	Auto A	Auto B	Auto C	Auto D
Spese fisse $F$	900 euro	580 euro	650 euro	1 200 euro
Costo al km $c$	0,25 euro/km	0,33 euro/km	0,27 euro/km	0,31 euro/km

**a.** Se percorro 10 000 km all'anno, quale auto è più conveniente?

- A. L'auto A
- B. L'auto B
- C. L'auto C
- D. L'auto D



b. Il proprietario di un'auto di tipo A ha speso 3 000 euro in un anno. Quanti km ha percorso?

Risposta: ..... km

c. Se confrontiamo un'auto di tipo B con una di tipo D, possiamo dire che

- A. è sempre più economico utilizzare l'auto di tipo B
- B. è sempre più economico utilizzare l'auto di tipo D
- C. l'auto di tipo B conviene fino a un certo numero di km annuali, oltre questo numero conviene l'auto di tipo D
- D. l'auto di tipo D conviene fino a un certo numero di km annuali, oltre questo numero conviene l'auto di tipo B

Relazioni e funzioni	D11 a	2,1	16,1	16,9	61,2	3,7
Relazioni e funzioni	D11 c	6,2	38,7	7,1	37,5	10,4
Relazioni e funzioni	D11 b	21,8	47,1	31,1		

# ***Gli strumenti di calcolo***

La definizione di *competenza matematica* comprende esplicitamente l'uso di strumenti matematici. Questi possono essere strumenti fisici, attrezzature digitali, software, strumenti di calcolo.

**Una valutazione della matematica  
basata sull'uso del computer è una parte  
innovativa dell'indagine PISA 2012,  
ed è offerta come opzione  
ai paesi partecipanti**

**L'uso dei calcolatori è stato permesso  
in tutte le indagini PISA fino ad oggi,  
in maniera coerente con la prassi  
di ogni paese partecipante**

**Mentre i quesiti di matematica delle precedenti indagini PISA erano stati elaborati in modo da essere, per quanto possibile, “neutri” rispetto all'uso delle calcolatrice, per alcuni degli item del fascicolo cartaceo di PISA 2012 una calcolatrice può essere utile.**

**Per la parte opzionale di indagine  
basata sul computer,  
strumenti matematici come ad esempio una  
calcolatrice online saranno inclusi  
come parte del materiale fornito  
per alcune domande**

# *La percentuale di domande*



<i><b>Categoria di contenuti</b></i>	<i><b>Percentuale di punteggio</b></i>
Cambiamento e relazioni	Circa 25
Spazio e forma	Circa 25
Quantità	Circa 25
Incertezza e dati	Circa 25
<b>Totale</b>	<b>100</b>

<i><b>Categoria di processo</b></i>	<i><b>Percentuale di punteggio</b></i>
Formulare matematicamente le situazioni	Circa 25
Impiegare concetti, procedure, fatti e ragionamenti matematici	Circa 50
Interpretare, applicare e valutare i risultati matematici	Circa 25
<b>Totale</b>	<b>100</b>

<i><b>Categoria di contesto</b></i>	<i><b>Percentuale di punteggio</b></i>
Personale	Circa 25
Occupazionale	Circa 25
Sociale	Circa 25
Scientifico	Circa 25
<b>Totale</b>	<b>100</b>

# *La prova col computer*

Utilizzare le potenzialità offerte dalla tecnologia informatica porta a domande di valutazione che sono più coinvolgenti, ricche di sfumature, e facili da comprendere per gli studenti.

Per esempio, gli studenti possono trovarsi di fronte a stimoli in movimento, rappresentazioni di oggetti tridimensionali che possono essere ruotati, o a un accesso più flessibile alle informazioni rilevanti.

Nuovi formati di domande,  
come ad esempio quelle che richiedono  
agli studenti di cliccare, trascinare e rilasciare  
elementi o di usare lo zoom su un'immagine,  
sono studiati per impegnare gli studenti,  
permettono una gamma più ampia di tipologie di  
risposte, e danno una immagine  
più completa della *competenza matematica*.

Il test al computer potrà  
includere la valutazione  
delle seguenti competenze:

Utilizzando semplici finestre di creazione guidata, produrre un grafico da un insieme di dati, compresa una tabella di valori (ad esempio, un grafico a torta, un grafico a barre....)



Produrre grafici di funzioni e usare i grafici per rispondere a quesiti sulle funzioni

Selezionare informazioni e pianificare  
strategie efficienti di selezione

Usare calcolatrici portatili o sullo schermo

Usare strumenti virtuali come una riga o un goniometro sullo schermo

Trasformare immagini usando una finestra di dialogo o il mouse per ruotare, riflettere o traslare l'immagine

**Grazie e  
*buona  
valutazione!***