



Il Framework di Matematica di PISA 2012 Implicazioni concettuali e applicative

Carlo Di Chiacchio
INVALSI



*Progetto realizzato con il contributo del Fondo Sociale Europeo – Programma Operativo Nazionale “Competenze per lo Sviluppo”
Azione A.2 “Definizione di Strumenti e metodologie per l’autovalutazione/valutazione del servizio scolastico”*

Outline

- Concetti alla base del quadro di riferimento della Matematica di PISA
- Descrizione del quadro di riferimento per PISA 2012
- Evidenze empiriche

La Matematica scienza in continua evoluzione

L'insegnamento della Matematica ricerca
nuovi contenuti e metodologie.

La literacy matematica come un aspetto
dell'evoluzione della matematica in termini
applicativi.

Le diverse literacy

- Literacy quantitativa: la capacità di affrontare in maniera efficace gli aspetti quantitativi presenti nella vita di tutti i giorni.
- Enfasi sulla quantità
- Literacy matematica: capacità di applicare gli aspetti quantitativi della matematica e conoscenza della matematica in senso più ampio

La definizione di LM in PISA 2003

"La literacy matematica è la capacità di un individuo di identificare e comprendere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, di esprimere giudizi fondati, e di impegnarsi nella matematica in modo da soddisfare le proprie esigenze, attuali e future, come cittadino costruttivo interessato e riflessivo".

La definizione di LM in PISA 2012

"La literacy matematica è la capacità di una persona di formulare, utilizzare e interpretare la matematica in svariati contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo".

Mathematical Literacy

Quantitative Literacy

Spatial Literacy

Numeracy

Space & Shape

Quantity

Change & Relationships

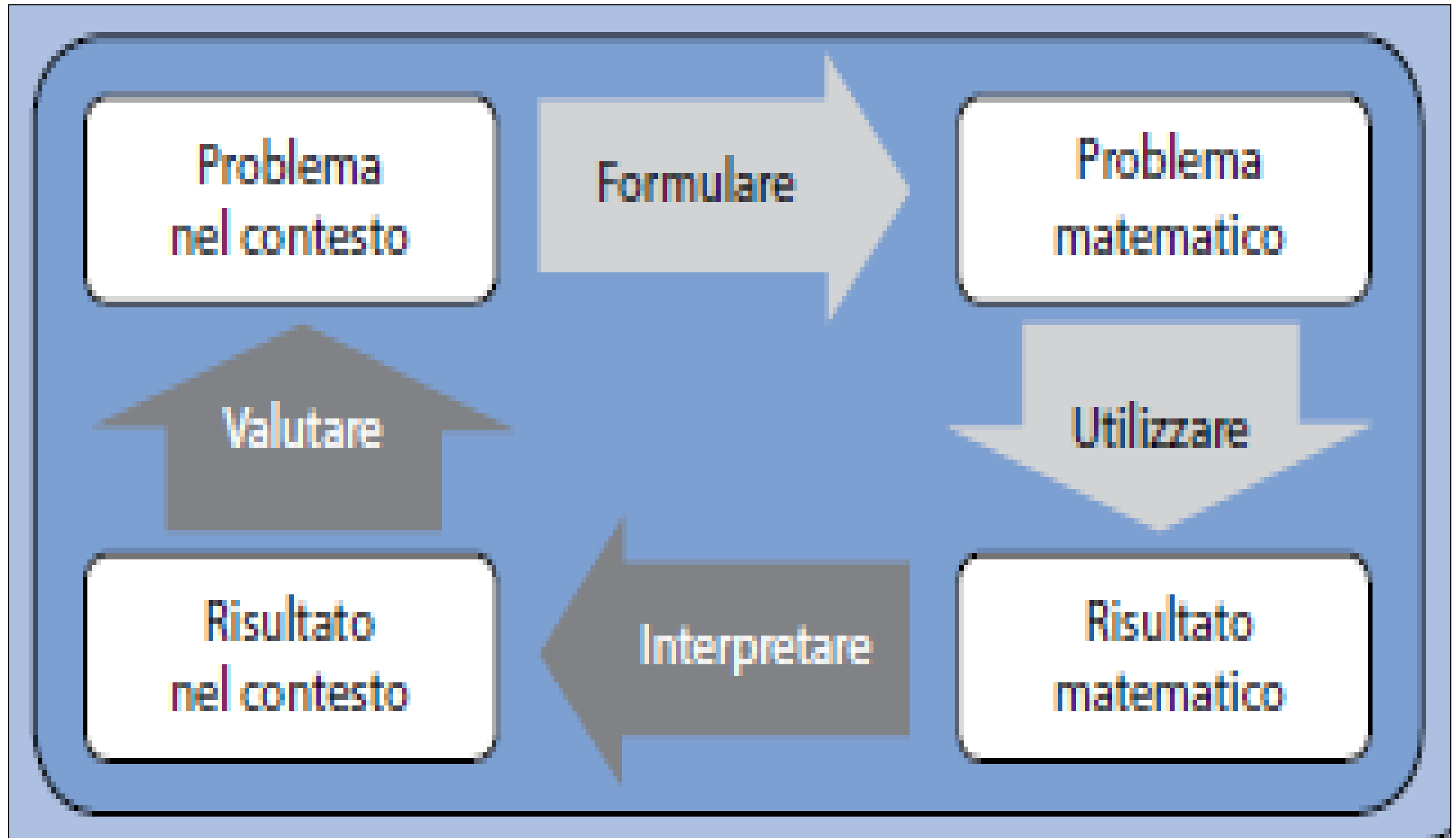
Uncertainty

La literacy matematica in PISA

- Capacità degli studenti di analizzare, ragionare e comunicare le idee in modo efficace in una varietà di situazioni
 - Formulazione
 - Risoluzione
 - Interpretazione

- La LM riguarda la funzionalità della matematica appresa a scuola
- Si basa su competenze apprese e praticate su tipici problemi sviluppati nel contesto scuola
- È necessaria la capacità di applicare le competenze in contesti meno strutturati
 - Decidere quale conoscenza è rilevante
 - Quale processo, quale soluzione
 - Riflessione sulla correttezza della risposta

Il processo di matematizzazione



Organizzazione fenomenologica: le aree di contenuto

- Quantità: ragionamento quantitativo.
 - sviluppo e l'utilizzo del senso dei numeri;
 - rappresentare i numeri in vari modi;
 - comprendere il significato delle operazioni, tenendo conto della grandezza dei numeri,
 - scrivere e capire calcoli matematicamente eleganti,
 - svolgere calcoli e stime aritmetiche mentali

- Spazio e forma: forme come configurazioni
- comprendere le proprietà degli oggetti e le posizioni relative degli oggetti
- come noi vediamo le cose e perché le vediamo in un certo modo
- imparare a navigare attraverso lo spazio e attraverso costruzioni e forme.

- Cambiamento e relazioni: i fenomeni naturali come manifestazioni di cambiamento
- Modelli su funzioni matematiche semplici
- Pensiero funzionale come obiettivi disciplinare fondamentale dell'insegnamento della matematica

- Incertezza e dati: due argomenti correlati – dati e caso
- comprensione del ruolo della variazione nei processi
- senso della quantificazione di quella variazione
- riconoscimento dell'incertezza e dell'errore nella misurazione
- consapevolezza della casualità

Matematica vs LM

- Literacy quantitativa: meno formale, più intuitiva, meno astratta, più contestuale, meno simbolica, più concreta. Abilità di funzionare in una comunità di pratiche
- Matematica: formale, astratta, simbolica
- Necessità di pensare i due concetti sovrapposti
- **Quale matematica per lo sviluppo della LM?**

Le competenze fondamentali per la LM

- Comunicazione: Lo studente percepisce l'esistenza di una sfida ed è stimolato a riconoscere e comprendere una situazione problematica. Durante il processo di risoluzione, potrebbe presentarsi la necessità di riassumere e presentare i risultati intermedi. Successivamente, una volta trovata la soluzione, la persona che ha risolto il problema potrebbe dover presentare la soluzione fornendo una spiegazione o una giustificazione

- Matematizzazione: trasformazione di un problema definito nel mondo reale in una forma strettamente matematica o l'interpretazione o valutazione di un risultato o un modello matematico in funzione del problema iniziale.

- Rappresentazione: Questo può consistere nel selezionare, interpretare, traslare e utilizzare diverse rappresentazioni per riuscire a farsi un'idea della situazione, a interagire con il problema o a presentare il proprio lavoro (grafici, tabelle, formule, ecc.).

- Ragionamento e argomentazione:

processi mentali basati sulla logica che permettono di analizzare e collegare gli elementi di un problema in modo tale da poterne trarre delle conclusioni, verificare una giustificazione data o fornire una giustificazione per affermazioni o soluzioni al problema

- Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi:
- processi di controllo critico che orientano lo studente nel riconoscere, formulare e risolvere i problemi in maniera efficace. Questa capacità matematica può essere richiesta in qualsiasi passaggio del processo di risoluzione del problema

- Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni:

comprendere, interpretare, manipolare e utilizzare espressioni simboliche in un contesto matematico (incluse espressioni e operazioni aritmetiche) retto da regole e convenzioni matematiche

- Utilizzo di strumenti matematici:

utilizzo pratico della literacy matematica. Questa abilità implica la conoscenza e la capacità di utilizzo di determinati strumenti di supporto all'attività matematica nonché la consapevolezza delle limitazioni di tali strumenti. Gli strumenti matematici possono altresì rivestire un ruolo importante nella comunicazione dei risultati

	Formulazione di situazioni in forma matematica	Utilizzo di concetti, fatti, procedimenti e ragionamenti matematici	Interpretazione, applicazione e valutazione dei risultati matematici
Comunicazione	Leggere, decodificare e interpretare affermazioni, domande, compiti, oggetti, immagini o animazioni (nella rilevazione computerizzata) al fine di creare un modello mentale della situazione	Articolare una soluzione, illustrare il lavoro necessario per arrivare alla soluzione e/o riassumere e presentare i risultati matematici intermedi	Elaborare e comunicare spiegazioni e argomentazioni nel contesto del problema
Matematizzazione	Identificare le variabili e le strutture matematiche soggiacenti al problema reale e formulare delle ipotesi per poterle utilizzare	Utilizzare la comprensione del contesto per orientare o organizzare il processo matematico di risoluzione, ad es. lavorare con un livello di precisione adeguato al contesto	Comprendere la portata e i limiti di una soluzione matematica derivanti dall'impiego di un determinato modello matematico
Rappresentazione	Creare una rappresentazione matematica delle informazioni del mondo reale	Dare un senso, mettere in relazione e usare una molteplicità di rappresentazioni nell'interazione con il problema	Interpretare i risultati matematici in diversi formati in relazione alla situazione o all'utilizzo; confrontare o valutare due o più rappresentazioni in relazione a una situazione
Ragionamento e argomentazione	Spiegare, difendere o giustificare la rappresentazione della situazione reale elaborata o individuata	Spiegare, difendere o giustificare il processo e i procedimenti usati per determinare un risultato o una soluzione di natura matematica Collegare le informazioni per giungere a una soluzione matematica, elaborare generalizzazioni o creare argomentazioni a più livelli	Riflettere sulle soluzioni matematiche ed elaborare spiegazioni e argomentazioni che supportino, confutino o qualificano una soluzione matematica a un problema contestualizzato
Elaborazione di strategie per la risoluzione dei problemi	Selezionare o elaborare un piano o una strategia per inquadrare i problemi contestualizzati in forma matematica	Attivare meccanismi di controllo efficaci nel corso delle varie fasi del procedimento che porta a una soluzione, conclusione o generalizzazione matematica	Elaborare e mettere in atto una strategia finalizzata a interpretare, valutare e convalidare una soluzione matematica a un problema contestualizzato
Utilizzo di un linguaggio simbolico, formale e tecnico e di operazioni	Utilizzare variabili, simboli, diagrammi e modelli standard adeguati al fine di rappresentare un problema reale attraverso un linguaggio simbolico/formale	Comprendere e utilizzare costrutti formali basati su definizioni, regole e sistemi formali; utilizzare algoritmi	Comprendere la relazione esistente tra il contesto del problema e la rappresentazione della soluzione matematica. Usare tale comprensione per orientare l'interpretazione della soluzione nel contesto e determinarne la plausibilità e le possibili limitazioni
Utilizzo di strumenti matematici	Usare strumenti matematici per riconoscere le strutture matematiche o per delineare relazioni matematiche	Conoscere e saper utilizzare adeguatamente i diversi strumenti che possono essere utili durante i processi e i procedimenti finalizzati alla ricerca delle soluzioni	Usare strumenti matematici per accertare la plausibilità di una soluzione matematica ed eventuali sue limitazioni e restrizioni in base al contesto del problema

- È necessario avere queste competenze a vari livelli
- È necessario sviluppare la fiducia nella propria capacità di utilizzare la matematica e di sentirsi a proprio agio con le idee quantitative.
- Difficoltà di insegnamento e acquisizione della LM: coinvolge contemporaneamente intuizione e algoritmi

- le competenze necessarie per la literacy matematica sono in realtà le competenze necessarie per la matematica
- la literacy matematica non deve essere confusa con lo studio della matematica: la literacy matematica riguarda la funzionalità della matematica, così come gli studenti la incontrano a scuola

L'Uso delle competenze di matematica per la previsione delle difficoltà dei quesiti di PISA

- In PISA 2003: Cluster di competenze
- Riproduzione. Implica la conoscenza di fatti, la rappresentazione, il riconoscimento di equivalenze, l'applicazione di algoritmi standard, in termini simbolici e formali (item a scelta multipla, completamento, matching, risposte aperte)

- Connessioni: è necessario collegare diversi domini della matematica e integrare l'informazione per risolvere problemi in cui si deve fare una scelta di strategie e di strumenti matematici. Dal punto di vista matematico è necessario decodificare e interpretare il linguaggio simbolico, collegandolo a quello naturale.

- Riflessione: la situazione viene matematizzata. È necessaria l'interpretazione, lo sviluppo di modelli e strategie, l'argomentazione con prove e generalizzazioni. È necessaria una componente critica e di analisi del modello e di riflessione sul processo. È inoltre necessaria una componente intuitiva, legata alla natura della matematica e al suo uso in altri domini

Lo schema di codifica delle difficoltà

- Selezionate sei categorie di competenza
 - Ragionamento e argomentazione, Comunicazione, Modellizzazione, Rappresentazione, Risoluzione matematica dei problemi, Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico
- Ciascuna categoria è stata definita secondo quattro livelli
- Valutazione indipendente

RAGIONAMENTO E ARGOMENTAZIONE

Processi di pensiero fondati logicamente che esplorano e collegano gli elementi di un problema allo scopo di fare inferenze, controllare una spiegazione fornita o fornire una giustificazione

LIVELLO 0	LIVELLO 1	LIVELLO 2	LIVELLO 3
Fare inferenze dirette a partire dalle istruzioni fornite	Riflettere per collegare l'informazione e fare inferenze (es. collegare componenti separate del problema)	Analizzare l'informazione per seguire o creare un'argomentazione sequenziale; ragionare da fonti di informazione collegate	Sintetizzare o valutare catene di ragionamento per giustificare inferenze o generalizzare

RISOLVERE I PROBLEMI MATEMATICAMENTE

Selezionare, predisporre o implementare una strategia matematica per risolvere problemi legati al compito o al contesto

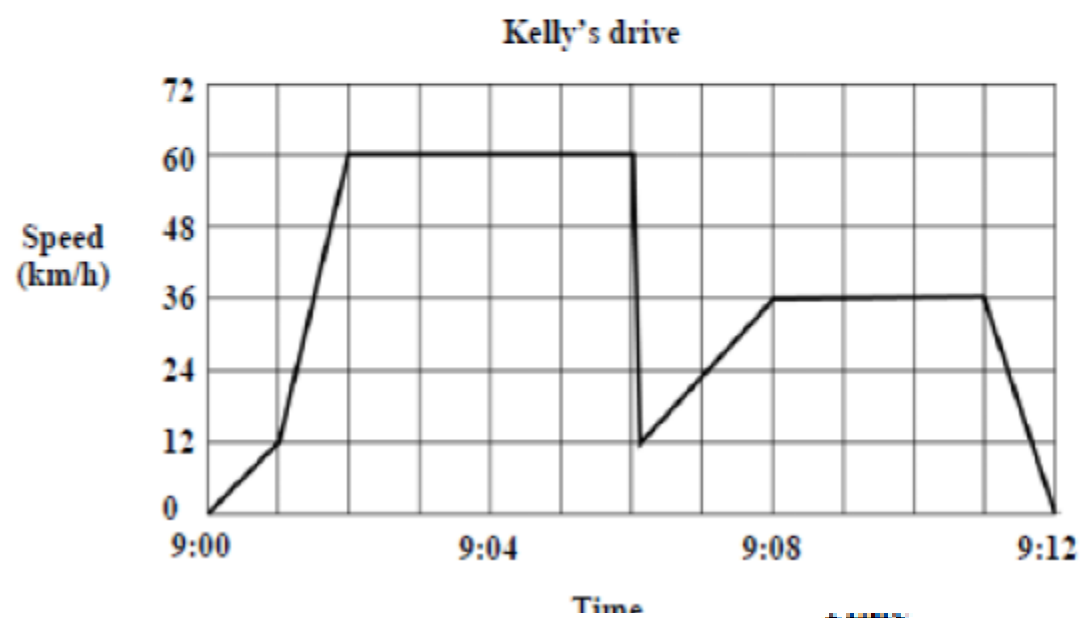
LIVELLO 0	LIVELLO 1	LIVELLO 2	LIVELLO 3
Intraprendere azioni dirette dove la strategia necessaria è ovvia	Decidere una strategia disponibile facendo uso di informazioni rilevanti fornite tale da raggiungere una conclusione	Costruire una strategia per trasformare un'informazione e data per raggiungere una conclusione	Costruire una strategia elaborata per trovare una soluzione esaustiva o generale; valutare differenti strategie

CAR DRIVE

Kelly went for a drive in her car. During the drive, a cat ran in front of the car. Kelly slammed on the brakes and missed the cat.

Slightly shaken, Kelly decided to return home.

The graph below is a simplified record of the car's speed during the drive.



Question 1: CAR DRIVE

What was the maximum speed of the car during the drive?

Maximum speed: km/h.

CAR DRIVE SCORING 1

Full Credit

Code 1: 60 km/h.

No Credit

Code 0: Other responses.

Code 9: Missing.

Item difficulty – PISA examples

A very easy item

Used in 2003 main survey then released

Note:

- Reading load – moderate?
- Mathematical appearance
- Simplified (unrealistic?) model
- ‘Simple’ graph interpretation (look for maximum)
- Constructed response, but strong guidance provided regarding form of answer

Valutazione del quesito

		Description
Reasoning & argumentation	(0)	Direct inference – locate the maximum from graph
Communication	(0)	Link text and graphic
Modelling	(1)	Interpret max speed from graphic model provided
Problem Solving	(0)	Obvious strategy, direct action (read the maximum)
Representation	(1)	Link text and graphic
Symbols & formalism	(1)	Time, speed, graph conventions

STUDENT HEIGHTS

M479Q01

Question 1: STUDENT HEIGHTS

In a mathematics class one day, the heights of all students were measured. The average height of boys was 160 cm, and the average height of girls was 150 cm. Alena was the tallest – her height was 180 cm. Zdenek was the shortest – his height was 130 cm.

Two students were absent from class that day, but they were in class the next day. Their heights were measured, and the averages were recalculated. Amazingly, the average height of the girls and the average height of the boys did not change.

Which of the following conclusions can be drawn from this information?

Circle 'Yes' or 'No' for each conclusion.

Conclusion	Can this conclusion be drawn?
Both students are girls.	Yes / No
One of the students is a boy and the other is a girl.	Yes / No
Both students have the same height.	Yes / No
The average height of all students did not change.	Yes / No
Zdenek is still the shortest.	Yes / No

STUDENT HEIGHTS SCORING

Code 1: 'No' for all conclusions.

No Credit

Code 0: Other responses.

Code 9: Missing

A very difficult item

Used in 2003 field trial, not selected

for 2003 main survey, released Note:

- Reading load - high
- Complex multiple choice format
- "All or nothing" scoring rule used
- Reasoning about statistical data

La valutazione del quesito

		Description
Reasoning & argumentation	(2)	Analyse info, connect variables
Communication	(3)	Interpret complex relations, connections
Modelling	(2)	Modify model for changed conditions, inferred relationships
Problem Solving	(3)	Construct elaborated strategy that copes with comprehensive analysis
Representation	(1)	Interpret textual representation of a situation
Symbols & formalism	(3)	Flexible analysis of mean and how it is affected

Risultati

	Ave S&F	Ave R&A	Ave PS	Ave Mod	Ave Com
Ave R&A	0.238 0.051				
Ave PS	0.301* 0.038	0.721* 0.000			
Ave Mod	0.606* 0.000	0.455* 0.001	0.401* 0.005		
Ave Com	0.405* 0.004	0.471* 0.001	0.100 0.497	0.267 0.066	
Ave Rep	0.062 0.676	0.314* 0.030	0.303* 0.036	0.261 0.073	0.082 0.581

Variables	R-Sq	Adj. R-Sq	C-p	S	S&F	R&A	PS	Mod	Com	Rep
1	48.1	47.0	38.6	0.94742		X				
2	68.8	67.4	7.7	0.74293	X	X				
3	72.4	70.5	4.0	0.70669	X	X	X			
4	73.8	71.3	3.7	0.69643	X	X	X			X
5	74.0	70.9	5.4	0.70206	X	X	X	X	X	
6	74.2	70.5	7.0	0.70705	X	X	X	X	X	X

Conclusioni

- Il Framework di Matematica di PISA sostanzia il legame tra Matematica e LM attraverso una concezione funzionale e fenomenologica dei concetti e strumenti matematici
- Fornisce indicazioni sullo sviluppo delle competenze matematiche basilari per la LM.

Conclusioni

- Dai risultati degli studenti è possibile evidenziare le problematiche legate all'insegnamento/apprendimento delle competenze basilari in termini funzionali
- Attingendo dallo schema di codifica dei processi e delle competenze è possibile analizzare le modalità di risoluzione dei problemi e lavorare sulle aree problematiche