



**Istituto nazionale per la valutazione del sistema educativo
di istruzione e di formazione**

**QUADERNI SNV
N. 3/2012 –MAT**

**Le prove INVALSI di matematica nella prima e nella terza classe della scuola
secondaria di primo grado (Prova nazionale)**

Paolo Bassani, Eleonora Fioravanti, Marco Pelillo e Stefania Pozio

*Le opinioni espresse nei lavori sono attribuibili esclusivamente agli autori e non impegnano
in alcun modo la responsabilità dell'Istituto. Nel citare i temi, non è, pertanto, corretto
attribuire le argomentazioni ivi espresse all'INVALSI o ai suoi Vertici*

Quaderni SNV – N. 3/2012 MAT

Introduzione

L'obiettivo di questo quaderno è analizzare i risultati che gli studenti della classe I e III della scuola secondaria di I grado hanno riportato rispettivamente nella prova del Servizio Nazionale di Valutazione e nella Prova nazionale svoltasi nell'A.S. 2011-12. Le due prove vengono analizzate parallelamente per le due classi, in un'ottica di continuità e, in particolare, i diversi item che rispettivamente le compongono con i relativi risultati, vengono analizzati suddivisi nei 4 macroprocessi a cui ciascuno di essi appartiene: "Concetti e procedure", "Rappresentazioni", "Modellizzazione", "Argomentazione". Gli autori di questo quaderno sono docenti della scuola secondaria di I grado, pertanto alcuni commenti o opinioni che vengono espressi sono frutto di riflessioni che scaturiscono dalla loro esperienza in classe.

Il quaderno è suddiviso in 5 parti: la prima parte descrive le caratteristiche generali delle due prove, sottolineandone analogie e differenze, ciascuna delle restanti quattro parti è dedicata ad uno dei 4 macroprocessi sopra menzionati. In particolare, per ciascun macro processo, vengono analizzati gli item che hanno ottenuto i risultati più significativi in termini di valenza didattica.

Prima parte: Caratteristiche delle prove

Le domande che compongono le prove del SNV sono costruite a partire da due dimensioni, così come descritto nel Quadro teorico di riferimento dell'INVALSI:

- 1) *i contenuti matematici*: Numeri, Spazio e figure, Relazioni e funzioni, Dati e previsioni;
- 2) *i processi* che gli studenti attivano quando rispondono ai quesiti.

I processi che possono essere valutati nelle prove INVALSI sono 8 e vengono qui riportati nella seguente tabella (Tabella 1):

Tabella 1

Codice	Processi
1	conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (<i>oggetti matematici, proprietà, strutture...</i>).
2	conoscere e utilizzare algoritmi e procedure (<i>in ambito aritmetico, geometrico...</i>)
3	conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (<i>verbale, numerica, simbolica, grafica, ...</i>).
4	risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico - (<i>individuare e collegare le informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive, confrontare strategie di soluzione, descrivere e rappresentare il procedimento risolutivo...</i>).
5	riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze (<i>saper individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, stimare una misura,...</i>).
6	acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (<i>congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, ...</i>).
7	utilizzare strumenti, modelli e rappresentazioni nel trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (<i>descrivere un fenomeno in termini quantitativi, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, ...</i>).
8	riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione (<i>riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...</i>).

In ogni disciplina e nella matematica in particolare, quando si risolve un compito, si attivano diversi processi, profondamente intrecciati. Quanto più il compito è complesso, tanto più è difficile distinguere i processi fondamentali interessati e individuare quello prevalente. In genere gli estensori delle domande delle prove INVALSI precisano, nel classificare le domande in base ai processi, di riferirsi a quello principalmente interessato nel compito, ben consapevoli che i processi effettivamente attivati sono molteplici.

A partire da quest'anno, gli 8 processi sopra menzionati, sono stati raggruppati, ai fini della restituzione dei dati, in 4 gruppi, chiamati macroprocessi. La scelta di raggruppare alcuni processi, in modo tale da ridurre il numero di gruppi classificati da otto a quattro unità, obbedisce alla logica di aiutare nell'interpretazione dei risultati, soprattutto per rendere più agevole l'individuazione dei punti di forza e di debolezza degli studenti, semplificando anche i documenti di restituzione.

Gruppo A: Processi 1 e 2 Macro-processo 1: Concetti e procedure

Gruppo B: Processi 3 e 8 Macro-processo 2 :Rappresentazioni

Gruppo C: Processi 4, 5, 7 Macro-processo 3: Modellizzazione

Gruppo D: Processo 6 Macro-processo 4: Argomentazione

I processi del Gruppo A si riferiscono agli oggetti della matematica e alle procedure che vengono applicate quando si richiede di risolvere un quesito che richiede la conoscenza, l'applicazione e la rielaborazione di concetti e procedure. I processi del Gruppo B riguardano la capacità di saper riconoscere ed utilizzare diverse forme di rappresentazioni, comprese quelle di forme nello spazio. Il terzo macro-processo riguarda la modellizzazione matematica di una situazione problematica, e viceversa l'interpretazione di un modello matematico alla luce dei vincoli di realtà. E' inclusa nel terzo processo anche l'individuazione di una soluzione di un problema fra diverse proposte. Il quarto macro-processo riguarda la giustificazione/spiegazione di una soluzione o di una scelta, oppure la scelta fra argomenti/enunciati diversi. Facciamo osservare come tutti questi processi siano strettamente connessi ai Traguardi per lo sviluppo delle competenze (Indicazioni nazionali per il curricolo 2012, primo ciclo).

Le due prove (da ora in poi denominate, rispettivamente, SNV06 quella della I classe della scuola secondaria di I grado e PN2012 quella della III classe) sono costituite da un diverso numero di domande¹, ma da un numero simile di item² in quanto il tempo a disposizione degli studenti è lo stesso.

Gli item possono essere di quattro tipologie diverse:

- a) A scelta multipla, con quattro opzioni di risposta tra le quali lo studente deve scegliere quella corretta.
- b) A scelta multipla complessa, del tipo Vero/Falso oppure Sì/No
- c) A risposta aperta univoca
- d) A risposta aperta articolata, dove viene richiesto un procedimento risolutivo o di giustificare una risposta

Le domande del tipo c) e d) sono corrette dai docenti seguendo le istruzioni della guida per la correzione che viene fornita dall'INVALSI il giorno stesso della prova.

¹ Con il termine "domanda" si intende un testo, detto anche stimolo, seguito da uno o più quesiti.

² Usiamo il termine inglese "item" per riferirsi ai quesiti che compongono le domande.

Nella tabella 2³ è riportato il numero delle domande e degli item per ciascun ambito di contenuto e per ciascuna tipologia di domanda.

Tabella 2

Classe e Durata	Ambiti di contenuto	N. dom. per ambito	N. item per ambito	N. item per tipologia
I Sec. 1° grado 75 minuti Prova SNV06	- Numeri	9	13	Scelta multipla: 22 Scelta multipla complessa: 0 Aperta a risposta univoca: 21 Aperta a risposta articolata: 6
	- Spazio e figure	10	13	
	- Dati e Previsioni	5	10	
	- Relazioni e funzioni	7	13	
	Totale	31	49	
III Sec. 1° grado 75 minuti Prova PN2012	- Numeri	8	16	Scelta multipla: 20 Scelta multipla complessa: 4 Aperta a risposta univoca: 19 Aperta a risposta articolata: 3
	- Spazio e figure	7	11	
	- Dati e Previsioni	5	9	
	- Relazioni e funzioni	5	10	
	Totale	25	46	

Come si può osservare, nella prova SNV06 c'è un buon equilibrio nella distribuzione dei diversi item nei 4 ambiti di contenuto, mentre nella PN2012 l'ambito preponderante è Numeri, presente in 16 item su 46 totali. Per quanto riguarda la tipologia degli item, quelli a scelta multipla sono i più frequenti. Nella prova SNV06 non sono presenti domande con item a scelta multipla complessa, mentre nella PN2012 ce ne è una (la domanda E2 con 4 item di tipo Vero/Falso). Gli item a risposta univoca, cioè quelli che prevedono una breve risposta (generalmente la risposta corretta è univoca, ma per alcuni item possono essere considerate corrette anche più risposte) sono presenti circa nello stesso numero in entrambe le prove. Gli item a risposta aperta articolata, cioè che richiedono una giustificazione o lo svolgimento di calcoli sono invece presenti in numero maggiore nella prova SNV06. In particolare, per quanto riguarda gli item a risposta aperta (sia a risposta aperta univoca sia a risposta aperta articolata), nella tabella 3 è riportata la distribuzione di questa tipologia di quesiti nei diversi ambiti di contenuto. In tale classificazione si è deciso di indicare con RU gli item a risposta aperta univoca e di indicare, fra gli item a risposta aperta articolata, con RC quelli in cui si richiede di descrivere un procedimento e con RG quelli in cui si richiede di giustificare un'affermazione o una scelta.

Come si può notare, gli item RU sono quelli presenti in numero maggiore in entrambe le prove. In PN2012 non sono presenti item di tipo RC, che invece sono presenti in SNV06. In entrambe le prove vi sono 3 item RG, anche se distribuiti in maniera diversa nei 4 ambiti.

³ Dal Rapporto Nazionale

http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/Rapporti/Rapporto_rilevazione_apprendimenti_2012.pdf

Tabella 3

Classe	Ambiti	N. item a RU per ambito	N. item RC per ambito	N. item RG per ambito
I Sec. 1° grado Prova SNV06	- Numeri	5	0	0
	- Spazio e figure	6	0	1
	- Dati e Previsioni	6	0	1
	- Relazioni e funzioni	4	3	1
	Totale	21	3	3
III Sec. 1° grado Prova PN2012	- Numeri	7	0	0
	- Spazio e figure	5	0	2
	- Dati e Previsioni	4	0	1
	- Relazioni e funzioni	3	0	0
	Totale	19	0	3

RU = risposta univoca, **RC** = richiesta di descrivere un procedimento, **RG** = richiesta di giustificare un'affermazione o una scelta.

Nelle tabelle 4 e 5 è riportata la distribuzione dei diversi item rispetto ai macroprocessi rispettivamente nelle prove SNV06 e PN2012. Come si può osservare, per entrambe le prove, gli item dei macroprocessi “Concetti e procedure” e “Modellizzazione” sono i più numerosi poiché, per quanto riguarda il primo macroprocesso, esso riguarda i primi due processi che sono preliminari all’insieme dei processi valutati dai test INVALSI e il terzo macroprocesso, invece, comprende ben 3 processi. Diversa invece è la distribuzione del numero di item dei diversi ambiti in ciascun macroprocesso per le due prove. Infatti, ad esempio, per quanto riguarda “Concetti e procedure”, l’ambito più rappresentato è Numeri in entrambe le prove, ma in Dati e previsioni questo processo non è presente in SNV06, mentre in PN2012 è presente con 5 item.

In SNV06 il macroprocesso “Modellizzazione” è presente in maniera preponderante negli item appartenenti all’ambito Relazioni e funzioni e in modo meno significativo negli item di Spazio e figure, mentre in PN2012 gli item appartenenti a questo processo sono più equamente distribuiti tra i diversi ambiti.

Tabella 4

SNV06	Numeri	Spazio e Figure	Dati e Previsioni	Relazioni e Funzioni	Tot
Concetti e procedure	7	6	0	1	14
Rappresentazioni	0	2	1	1	4
Modellizzazione	5	3	8	10	26
Argomentazione	1	2	1	1	5
Totale	13	13	10	13	49

Tabella 5

PN2012	Numeri	Spazio e Figure	Dati e Previsioni	Relazioni e Funzioni	Tot
Concetti e procedure	10	1	5	2	18
Rappresentazioni	1	4	0	1	6
Modellizzazione	4	3	3	5	15
Argomentazione	1	3	1	2	7
Totale	16	11	9	10	46

I processi “Rappresentazioni” e “Argomentazione” sono presenti principalmente nell’ambito Spazio e figure in entrambe le prove, mentre sono presenti in modo in modo meno significativo negli altri ambiti. In particolare, per quanto riguarda il processo “Rappresentazioni”, esso non è presente nell’ambito Numeri per la SNV06 e nell’ambito Dati e previsioni per la PN2012.

Infine, tralasciando per un momento il raggruppamento degli 8 processi in macro-processi e tornando invece a considerarli singolarmente, si riporta in tabella 6 la distribuzione del numero di item rispetto a ciascuno dei processi.

Tabella 6

Ambito Processo	Numeri		Spazio e Figure		Dati e Previsioni		Relazioni e Funzioni		Totale item	
	SNV06	PN2012	SNV06	PN2012	SNV06	PN2012	SNV06	PN2012	SNV06	PN2012
1	2	1	4	0	0	2	0	0	6	3
2	5	9	2	1	0	3	1	2	8	15
3	0	1	0	0	1	0	1	1	2	2
4	3	1	0	3	0	0	9	1	12	5
5	2	3	3	0	2	1	1	1	8	5
6	1	1	2	3	1	1	1	2	5	7
7	0	0	0	0	6	2	0	3	6	5
8	0	0	2	4	0	0	0	0	2	4
Totale item	13	16	13	11	10	9	13	10	49	46

L’analisi di questa tabella mostra che il processo più ricorrente in PN2012 è il 2 (Conoscere e utilizzare algoritmi e procedure), in particolare nell’ambito Numeri. In SNV06 il processo maggiormente presente è il 4 (Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi), principalmente nell’ambito Relazioni e funzioni.

Riflessioni generali sui risultati

Analizziamo ora i risultati ottenuti dagli studenti del campione nazionale rispettivamente per SNV06 e per PN2012. Nelle figure 1, 2, 3, e 4, tratte dal Rapporto dell’INVALSI (vd. nota 1⁴), vengono presentati, rispettivamente, le *performance* degli studenti in SNV06 e PN2012 sia per ambiti di contenuto che per macro-processi. Si tenga presente, nella lettura dei grafici riportati nelle figure, che la scala verticale è stata sempre riportata in ordine inverso (decrescente). Come precisato nel rapporto INVALSI, sulla scala verticale, “è possibile leggere sia il livello di abilità dei soggetti rispondenti sia il grado di difficoltà delle domande afferenti a una certa parte della prova o a una data categoria di processi” (*ivi*, p. 152). Ciascuna delle figure riporta due grafici, uno (la retta orizzontale) che rappresenta la mediana generale dei livelli di difficoltà dei quesiti e l’altro che

⁴ Figura 1, Fig. 4.55 pag. 109; Figura 2, Fig. 4.56, pag. 110; Figura 3, Fig. 4.73, pag. 130; Figura 4, Fig. 4.74, pag. 131.

rappresenta i punteggi mediani conseguiti sull'intera scala dagli alunni che hanno risposto correttamente alle domande relative agli ambiti di contenuto (Figure 1 e 2) o alle domande afferenti a una stessa macro-categoria di processi (Figure 3 e 4). Come precisato nel Rapporto INVALSI (p. 152), “Quanto più il punto mediano cade in alto, rispetto alla retta orizzontale, tanto più questo indica che buona parte degli studenti hanno livelli di competenza adeguati per rispondere correttamente a quella parte della prova, mentre, viceversa, quanto più il punto mediano si situa al di sotto della retta orizzontale tanto meno adeguata risulta la competenza degli allievi per affrontare positivamente quella determinata parte della prova”.

Come si può notare analizzando le Figure 1 e 2, relative agli ambiti di contenuto rispettivamente in SNV06 e in PN2012, nella prova SNV06 le domande che hanno presentato più difficoltà riguardano gli ambiti Relazioni e funzioni e Numeri, seguite da quelle di Spazio e figure, mentre le più semplici sono risultate quelle di Dati e Previsioni. Invece, nella prova PN2012, le domande relative all'ambito Spazio e Figure sono quelle che hanno presentato più difficoltà, seguite da quelle degli ambiti Numeri e Dati e Previsioni. Le domande più semplici sembrano provenire dall'ambito Relazioni e Funzioni.

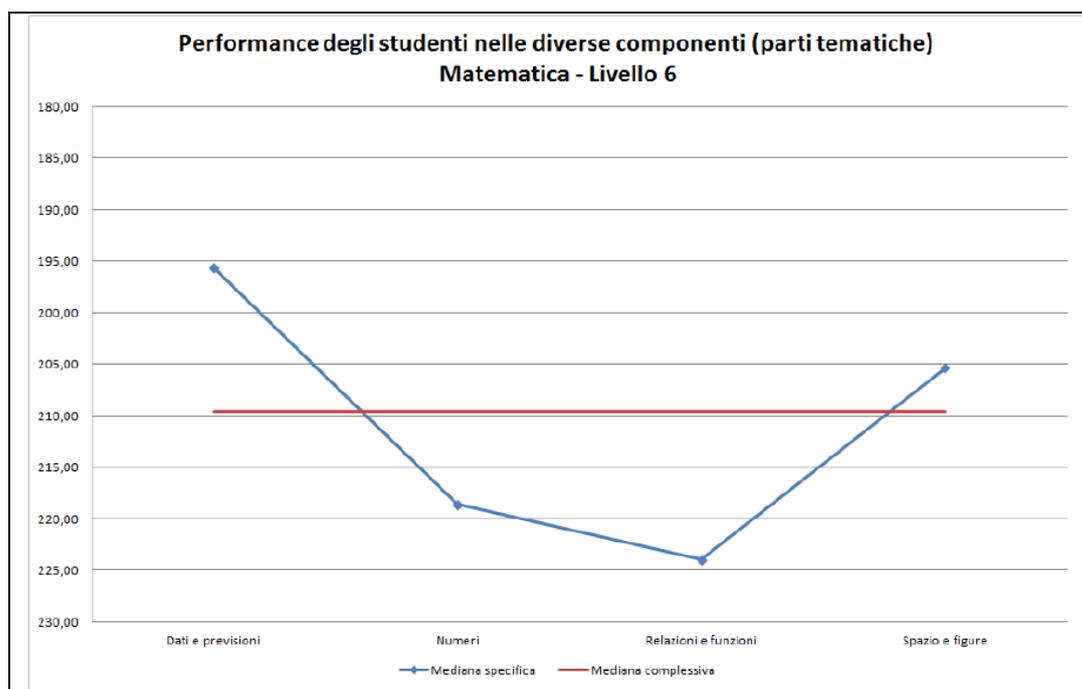


Figura 1

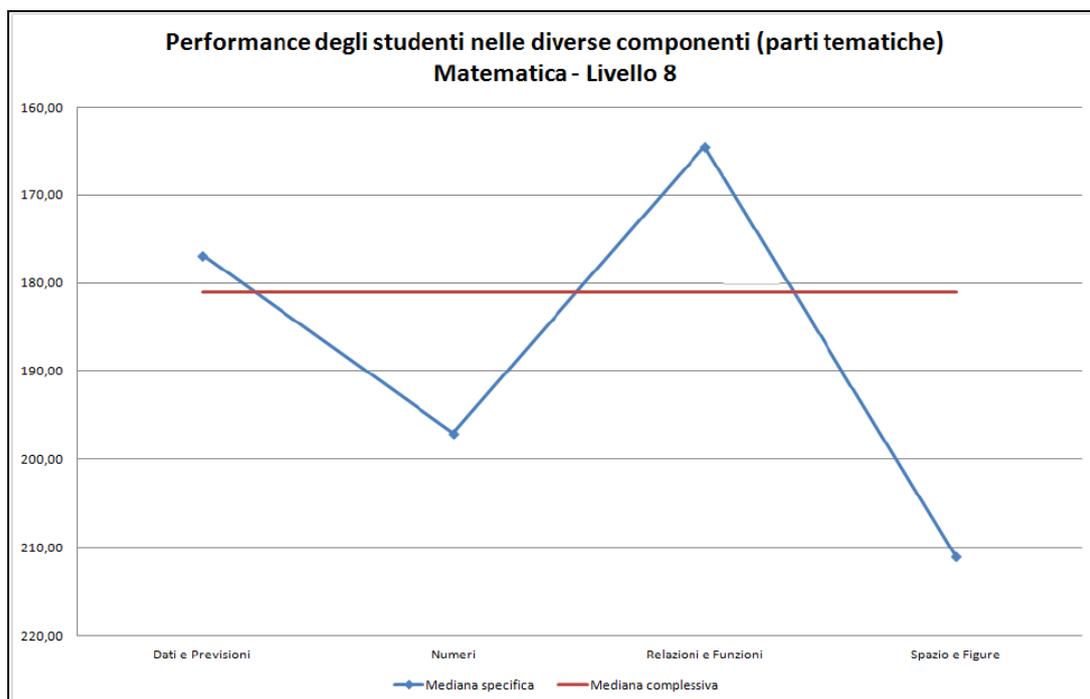


Figura 2

Per quanto riguarda i processi implicati (vedi Figure 3 e 4, relative a SNV06 e PN2012 rispettivamente) si nota che le difficoltà maggiori riguardano l' "Argomentazione", per entrambi i livelli. Per SNV06, solo uno dei 5 item che riguardavano questo processo era a risposta aperta articolata, gli altri erano a risposta univoca o a scelta multipla. La difficoltà in tale processo è probabilmente dovuta a una prassi didattica abituata a insegnare procedure piuttosto che a sviluppare significati. Il macro-processo "Rappresentazioni" è risultato il più semplice.

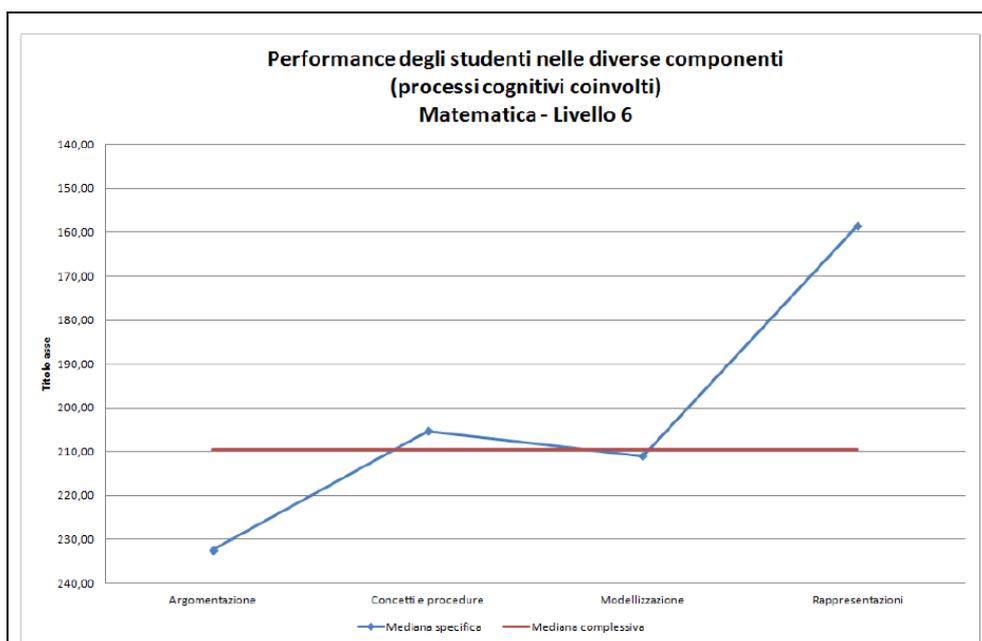


Figura 3

Invece, per PN2012, le domande in cui gli studenti non hanno mostrato livelli adeguati di competenze sono quelle relative ai macro-processi “Rappresentazioni” e “Argomentazione”. È pur vero che gli item che si riferiscono a questi macro-processi riguardano principalmente l’ambito Spazio e figure che è quello in cui gli studenti hanno mostrato di non avere competenze adeguate. Quindi è difficile stabilire se, per gli studenti di III media, abbia un peso maggiore l’ambito di contenuto e quindi il singolo quesito o il processo; possiamo anche supporre che sia una combinazione di entrambi.

Come sostengono gli autori del quaderno che analizza le prove della terza classe della scuola secondaria di primo grado e della seconda classe della scuola secondaria di secondo grado (Quaderno SNV 4/2012 <http://www.invalsi.it/snvpn2013/index.php?action=quadernisnv>) “probabilmente le difficoltà incontrate dagli studenti in “Spazio e Figure” potrebbero non essere tanto legate all’ambito tematico (o, almeno non solo all’ambito), ma alla presenza, in quell’ambito, di item che richiedono di attivare processi legati all’argomentazione”.

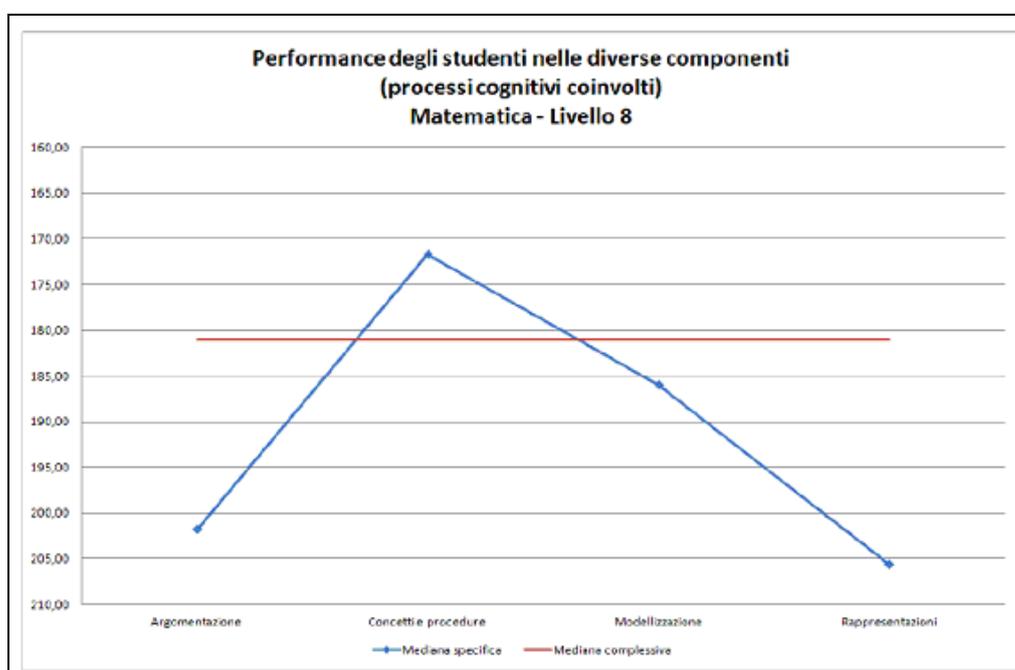


Figura 4

Parte II: Analisi delle domande nelle due prove

Macroprocesso 1: CONCETTI E PROCEDURE

Il macroprocesso 1, denominato “*Concetti e procedure*”, include i processi 1 e 2 del QdR Invalsi, così definiti:

1. conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (*oggetti matematici, proprietà, strutture...*);
2. conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (*in ambito aritmetico, geometrico...*)

Si tratta di processi di base, senza i quali non è possibile per uno studente affrontare nessun tipo di quesito di matematica e sono preliminari all’insieme dei processi cognitivi valutati dai test Invalsi. La misura della *performance* degli studenti nell’ambito di questi due processi rappresenta anche una valutazione efficace del grado di raggiungimento degli obiettivi formativi della matematica propri della scuola secondaria di I grado. Infatti appartengono a questi due processi quesiti usualmente proposti nella prassi didattica, quali il saper tracciare l’altezza in un triangolo o il saper riconoscere proprietà delle potenze.

Nelle tabelle 7a e 7b è riportato l’elenco di tutti i quesiti appartenenti a questi due processi rispettivamente per la prova della I secondaria di I grado (SNV06) e per la Prova nazionale (PN2012), con le loro principali caratteristiche⁵: ambito di contenuto, tipologia del quesito, difficoltà.

Tabella 7a

I SECONDARIA DI I GRADO Prova SNV06						
Domanda	Ambito	Tipo di item	% corrette	% mancanti	processo	Difficoltà
D3b	RF	MC	35,7	1,0	2	0,66
D4	NU	MC	58,5	4,5	1	-0,46
D6b	NU	MC	30,1	0,6	2	1
D10	SF	MC	47,1	0,9	1	0,1
D15	SF	MC	14,1	6,9	2	2,14
D18a	NU	MC	47,4	5,7	2	0,08
D18b	NU	RU	39,8	12,7	1	0,45
D20	NU	RU	9,1	23,3	2	2,61
D22	NU	RU	48,6	12,1	2	0,02
D23	NU	MC	10,0	2,2	2	2,44
D25	SF	RU	51,1	14,2	2	-0,06
D27a	SF	RU	66,4	7,7	1	-0,89
D27b	SF	RU	46,4	10,7	1	0,1
D30	SF	MC	58,8	2,6	1	-0,48

⁵ Ambiti di contenuto: Nu = Numeri; SF = Spazio e figure; RF = Relazioni e funzioni; DP = Dati e previsioni
 Tipologia di quesito. MC = Scelta multipla; RU = Risposta univoca; V/F = Vero/Falso

Tabella 7b

III SECONDARIA DI I GRADO Prova PN2012						
Domanda	Ambito	Tipo di item	% corrette	% mancanti	processo	Difficoltà
E2a	NU	V/F	74,0	1,4	2	0,31
E2b	NU	V/F	91,3	0,8	2	
E2c	NU	V/F	56,6	1,1	2	
E2d	NU	V/F	83,6	1,3	2	
E3a	DP	MC	40,3	4,3	2	0,31
E4a	RF	MC	59,7	2,5	2	0,3
E7	NU	RU	56,7	8,0	1	0,47
E10b	DP	MC	30,1	4,4	1	0,27
E17a	RF	RU	58,1	8,3	2	-0,44
E18	NU	RU	30,1	26,9	2	0,88
E19a	DP	RU	79,7	14,0	2	-1,79
E19b	DP	MC	48,0	7,2	1	0,05
E21a	NU	RU	79,6	6,4	2	-0,78
E21b	NU	RU	67,8	8,6	2	
E21c	NU	RU	60,0	10,2	2	
E21d	NU	RU	70,8	10,2	2	
E24	NU	RU	54,9	4,8	2	-0,14
E25	SF	RU	67,6	11,2	2	-1,02

Per quanto riguarda SNV06, gli item riferibili ai processi 1 e 2 appartengono principalmente agli ambiti Numeri e Spazio e figure e sono di tipo a scelta multipla o a risposta univoca mentre nella PN2012, anche se l'ambito Numeri rimane preponderante, vi sono anche quesiti appartenenti agli altri tre ambiti. In quest'ultima prova, la modalità di risposta è principalmente a scelta multipla o a risposta univoca, ma vi sono anche 4 item di tipo Vero/Falso.

Le domande di SNV06 riferibili a questi due processi sono risultate di difficoltà media (difficoltà⁶ intorno allo 0), tranne D15, D20 e D23 che sono risultate le più difficili di tutta la prova. Le domande di PN2012 sono invece risultate tutte di difficoltà medio-facile in quanto il valore dell'indice di difficoltà è sempre intorno allo 0.

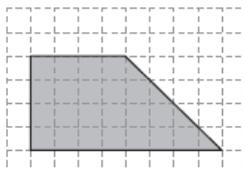
Cominciamo ad analizzare le domande che sono risultate più difficili per SNV06 ed in particolare analizziamo i risultati riportati dagli studenti alla domanda D20 in quanto, tale domanda è presente, anche se ovviamente con il testo leggermente modificato, anche in PN2012 (domanda E18) e quindi è interessante analizzare in parallelo i risultati ottenuti dagli studenti di questi due diversi livelli.

Entrambe le domande sono significative perché trattano un argomento molto presente nella prassi didattica: la rappresentazione di frazioni; tuttavia la richiesta è inusuale in quanto normalmente si

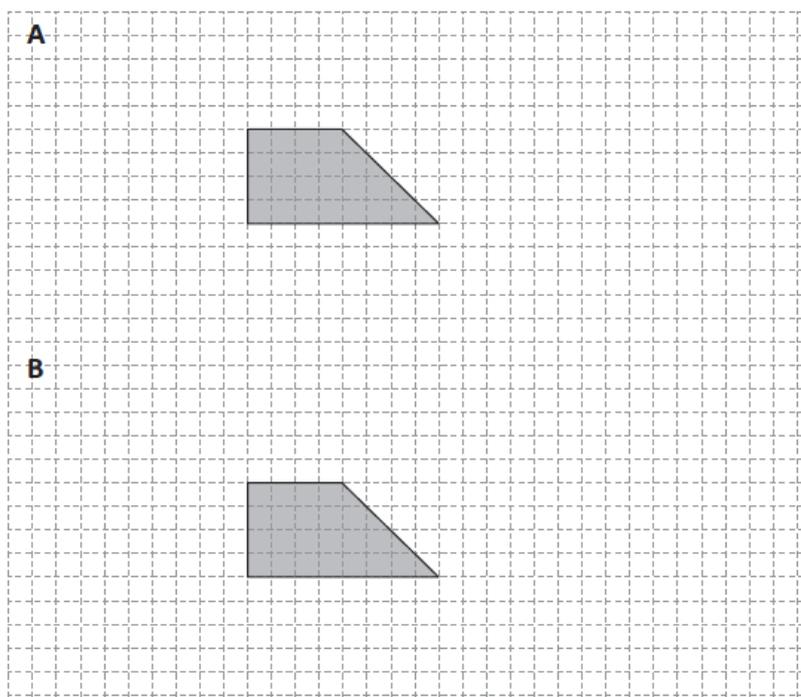
⁶I parametri di difficoltà sono definiti su una scala convenzionale centrata sul valore 0 e compresa tra i valori -4 e +4. Ciò significa che domande con parametri di difficoltà inferiori a 0 sono generalmente facili e sono tanto più facili quanto più tali parametri assumono valori vicino a -4, mentre quelle con parametri positivi sono generalmente difficili, diventando più difficili quanto più ci si avvicina a +4 (INVALSI – Rapporto tecnico 2012).

chiede di individuare una parte (la frazione) rispetto all'intero, mentre in questo caso si richiede l'operazione contraria: individuare il tutto a partire dalla frazione. Infatti agli studenti viene mostrato un trapezio (rettangolo in SNV06 e isoscele in PN2012) che rappresenta i tre quarti di un'altra figura e si chiede di trovare la figura di partenza. Ovviamente ci sono diverse possibilità di soluzione, tutte ugualmente corrette.

D20. La figura che vedi di seguito corrisponde ai $\frac{3}{4}$ di una figura più grande.



Disegna due delle figure, una nello spazio A e una nello spazio B, da cui la figura che vedi sopra può essere stata ritagliata.

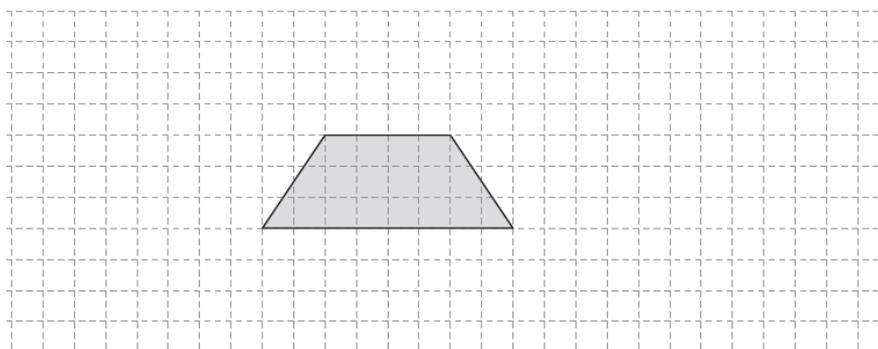


SNV06 – Anno scolastico 2011 – 2012

E18. Il trapezio che vedi sotto è stato ritagliato da una figura F più grande. Il trapezio è $\frac{3}{4}$ della figura F .



Disegna una delle possibili figure F da cui il trapezio è stato ritagliato.



PROVA NAZIONALE – Anno Scolastico 2011 – 2012

I risultati ottenuti in queste domande (composte da un solo item) sono riportati nelle seguenti tabelle:

Domanda D20 in SNV06		Frequenza	Percentuale
Validi	Errata	387623	66,6
	Corretta	53222	9,1
	Non valida	3390	0,6
	Non raggiunta	2115	0,4
	Mancante	135334	23,3
	Totale	581684	100,0

Domanda E18 in PN2012		Frequenza	Percentuale
Validi	Errata	235387	42,5
	Corretta	166687	30,1
	Non valida	1710	0,3
	Non raggiunta	608	0,1
	Mancante	148987	26,9
	Totale	553379	100,0

Come si può vedere, appare subito evidente che le percentuali di risposte mancanti⁷ sono molto elevate sia per gli studenti di I media (prova SNV06) sia per quelli di III media (PN2012) (rispettivamente 23% e 27% hanno lasciato la risposta in bianco) e molto basse le percentuali di risposte corrette. Tali percentuali sono infatti circa il 9% per la I classe della scuola secondaria di I grado e poco più del 30% per la III classe. I motivi di tali risultati (sia in termini di omissioni che di risposte errate) possono essere molteplici: innanzitutto, come detto in precedenza, si tratta di un quesito in cui viene richiesto agli studenti di operare su una figura non usuale in quanto, nella pratica didattica, non si utilizzano solitamente trapezi per operare con le frazioni, ma rettangoli o cerchi. Sostiene Pinilla (2005, p. 158) “per semplificare le attività di routine si tende a privilegiare

⁷ La differenza tra le risposte mancanti e le non raggiunte sta nel fatto che le risposte mancanti sono quelle a cui lo studente non ha risposto, ma ha risposto alle successive, mentre le non raggiunte rappresentano le domande oltre le quali lo studente non ha più risposto.

sempre l'uso di figure standard, quando si vogliono trovare frazioni in contesti continui: rettangoli, cerchi, quadrati (...). Questo fatto è assai pericoloso perché genera una misconcezione secondo la quale si possono trovare le frazioni solo di quelle figure e non di altre (...). È dunque assolutamente necessario creare situazioni, anche solo esercizi, nelle quali si debba trovare frazioni di figure non standard (...)"

Nel caso del quesito della I media (D20 nella prova SNV06), le figure richieste erano due diverse. Se ve ne fosse stata solo una probabilmente la maggior parte degli studenti avrebbe risposto trasformando il trapezio di partenza in un rettangolo e non sarebbe stato facile distinguere gli studenti che erano in grado di trovare solo questa soluzione facilmente intuitiva da quelli che, comprendendo che il quarto mancante non necessariamente doveva essere il triangolo che chiudeva la figura, erano capaci di trovare altre soluzioni.

Un altro aspetto importante di questi quesiti riguarda l'idea che la risposta corretta non è unica e che ci sono diverse soluzioni. Pinilla (2005, p. 159) afferma che "arrivare a capire questo fatto è difficile a causa del contratto didattico: lo studente crede che l'insegnante abbia già in mente la soluzione giusta e che si aspetti esattamente quella; il suo compito è dunque quello di intuire, indovinare che cosa l'insegnante si aspetti di sentirsi dire".

Altre domande i cui risultati sono interessanti da esaminare sono D18 (item D18a e D18b) per quanto riguarda la prova SNV06 e E21 (item E21a, E21b, E21c, E21d) per PN2012.

La domanda D18 riguarda la proprietà invariante della divisione, l'item D18a è a scelta multipla, D18b a risposta aperta univoca.

D18. Osserva la seguente divisione:

144	:	36	=	4
Dividendo		Divisore		Quoziente

a. Cosa accade al quoziente se divido sia il dividendo sia il divisore per 2?

A. Il quoziente viene diviso per 2

B. Il quoziente viene moltiplicato per 2

C. Il quoziente viene diviso per 4

D. Il quoziente non cambia

b. Moltiplica il divisore per 2. Qual è ora il quoziente?

Risposta:

Per quanto riguarda D18, i risultati sono riportati nella seguente tabella. Per l'item D18a, essendo a scelta multipla, sono riportate anche le percentuali di scelta dei diversi distrattori.

Item D18a		Percentuale
Validi	A. Il quoziente viene diviso per 2	21,3
	B. Il quoziente viene moltiplicato per 2	15,9
	C. Il quoziente viene diviso per 4	9,3
	D. Il quoziente non cambia	47,4
	Non valida	0,3
	Non raggiunta	0,2
	Mancante	5,7
	Totale	100,0

Item D18b		Percentuale
Validi	Errata	47,1
	Corretta	39,8
	Non valida	0,2
	Non raggiunta	0,2
	Mancante	12,7
	Totale	100,0

Si tratta di due item che riguardano un argomento, la proprietà invariante della divisione, ripetutamente affrontato sia nella scuola primaria che nella secondaria di I grado e, ciò nonostante, i risultati non sono del tutto soddisfacenti in quanto meno del 50% degli studenti risponde in modo corretto (47% nella 18a e 40% nella 18b). Ciò che colpisce è l'elevata percentuale di studenti che sceglie l'opzione A (21%) e l'opzione B (16%) nella prima domanda: infatti, l'operazione che viene proposta è molto facile da risolvere e quindi ci si aspetterebbe, da uno studente di I media, che conosca bene il significato di divisione o, per lo meno che sappia procedere in via sperimentale, risolvendo direttamente la divisione e analizzando il risultato.

La percentuale di risposte corrette diminuisce passando dal quesito a. al quesito b. Infatti, in quest'ultimo, nonostante si indicasse allo studente il percorso da seguire ("moltiplica il divisore per 2") e quindi si trattasse semplicemente di eseguire un'operazione che dovrebbe risultare banale per uno studente di I media, solo il 40% è stato in grado di rispondere in modo corretto.

La domanda E21 in PN2012 riguarda invece la moltiplicazione: si richiede agli studenti di scrivere il risultato di 4 moltiplicazioni che contengono gli stessi numeri che sono stati divisi o moltiplicati per una potenza di 10 rispetto alla moltiplicazione iniziale.

E21. Osserva questa moltiplicazione:

$$17 \cdot 36 = 612$$

Ora scrivi il risultato delle seguenti moltiplicazioni.

a.	$17 \cdot 3,6 = \dots\dots\dots$
b.	$17 \cdot 0,36 = \dots\dots\dots$
c.	$1,7 \cdot 360 = \dots\dots\dots$
d.	$1,7 \cdot 3,6 = \dots\dots\dots$

La domanda E21 in PN2012 ha ottenuto risultati migliori, come si può osservare dalla seguente tabella:

Domanda E21	Percentuale item a.	Percentuale item b.	Percentuale item c.	Percentuale item d.
Validi Errata	13,5	23,1	29,2	18,4
Corretta	79,6	67,8	60,0	70,8
Non valida	0,1	0,1	0,1	0,1
Non raggiunta	0,4	0,4	0,4	0,4
Mancante	6,4	8,6	10,2	10,2
Totale	100,0	100,0	100,0	100,0

È interessante notare che i risultati nei quattro item sono abbastanza diversi tra loro, infatti oscillano tra il 60% e l'80%, con l'item c. che ha ottenuto la percentuale più bassa di risposte corrette e l'item a. la percentuale più alta. Si può ipotizzare che alcuni studenti (e ciò si è verificato in fase di pretest), invece di rendersi conto che per ogni operazione non era necessario effettuare il calcolo, ma si doveva solo cambiare la posizione della virgola, hanno preferito eseguire l'operazione nuovamente introducendo così errori di calcolo.

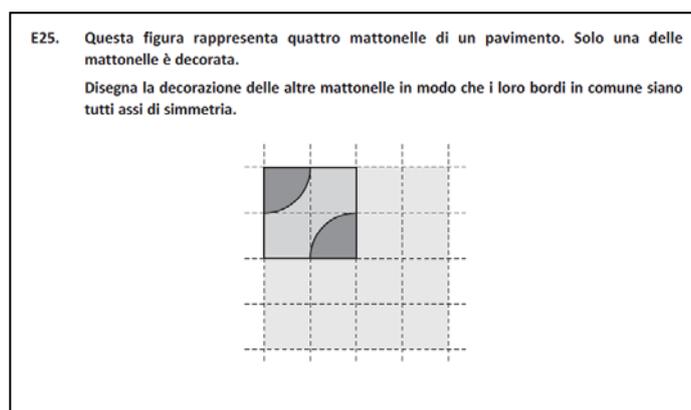
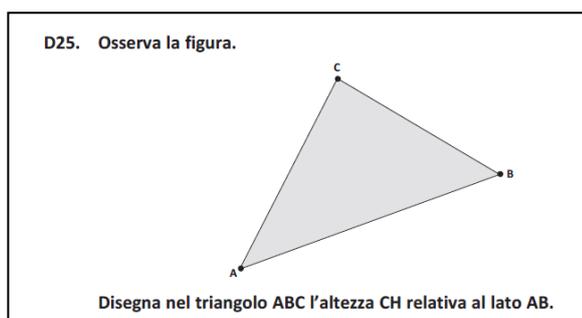
Un'altra domanda dell'ambito Numeri, per il processo 2, che è risultata molto difficile per gli studenti di I media è stata D23. La domanda, in cui si richiede di valutare quale fra quattro calcoli dà il risultato più grande, è composta da un unico item con risposta a scelta multipla. Il testo viene qui di seguito riportato con accanto i risultati:

D23. Quale delle seguenti operazioni dà il risultato più grande?	
A.	<input type="checkbox"/> $10 \times 0,5$
B.	<input type="checkbox"/> $10 \times 0,1$
C.	<input type="checkbox"/> $10 : 0,5$
D.	<input type="checkbox"/> $10 : 0,1$

Domanda 23	Frequenza	Percentuale
Validi A. $10 \times 0,5$	413871	71,2
B. $10 \times 0,1$	28391	4,9
C. $10 : 0,5$	57941	10,0
D. $10 : 0,1$	63093	10,8
Non valida	809	0,1
Non raggiunta	4595	0,8
Mancante	12984	2,2
Totale	581684	100,0

L'opzione A. è risultata un distrattore molto attraente, infatti è stata scelta nel 71% dei casi, mentre la risposta corretta è stata scelta solo dall'11% degli studenti. Questi risultati non stupiscono più di tanto: D'Amore (1999), parlando delle più diffuse misconcezioni tra gli studenti, cita proprio quella della moltiplicazione che accresce e della divisione che diminuisce. Egli sostiene, infatti, che nella scuola primaria gli studenti per anni verificano che la moltiplicazione dà generalmente un risultato maggiore dei fattori che la compongono e quindi, quando si trovano a moltiplicare un numero intero per un numero decimale inferiore a 1, si rendono conto che il modello che avevano ormai assimilato non funziona più. Ma "accomodare il modello precedente ad uno nuovo non è affatto facile (in quanto, caratteristica dei modelli, nei confronti delle immagini, è proprio la loro stabilità). Si crea quindi la necessità didattica di non rendere stabile quell'immagine per poterla poi ampliare successivamente, nel tentativo di costruire un modello del concetto di moltiplicazione in modo ottimale, che tenga conto dei successivi ampliamenti ai numeri non naturali" (D'Amore, 1999 p.130).

Nell'ambito Spazio e Figure, per il processo 2, troviamo due domande, una per la I classe (D25 in SNV06) e l'altra per la III classe (E25 in PN2012), che richiedono l'applicazione di procedure che dovrebbero risultare molto familiari ai nostri studenti. Nella prima, infatti, si richiede di tracciare un'altezza in un triangolo, nella seconda di tenere conto degli assi di simmetria per disegnare la decorazione di alcune mattonelle. Sono riportati di seguito i testi delle due domande con i risultati ottenuti.



Domanda D25		Frequenza	Percentuale
Validi	Errata	193412	33,3
	Corretta	296984	51,1
	Non valida	1665	0,3
	Non raggiunta	6848	1,2
	Mancante	82775	14,2
Totale		581684	100,0

Domanda E25		Frequenza	Percentuale
Validi	Errata	115199	20,8
	Corretta	374051	67,6
	Non valida	2134	0,4
	Non raggiunta	61994	11,2
Totale		553379	100,0

Per quanto riguarda la I media, ossia la domanda D25, risultano elevate le percentuali di risposte omesse, fatto questo inaspettato visto che veniva richiesto un compito molto diffuso nella prassi didattica. Il fatto che solo il 50% degli studenti abbia risposto in modo corretto potrebbe essere dovuto al fatto che il lato su cui doveva essere tracciata l'altezza non era messo in posizione orizzontale, bensì obliqua e quindi molti studenti hanno tracciato un segmento verticale a partire dal punto C invece di tracciare la perpendicolare al lato AB.

La domanda E25 per la III media ha avuto un esito migliore perché quasi il 70% di studenti ha dato una risposta corretta, mentre, poiché era l'ultima domanda del fascicolo della PN2012, circa l'11% degli studenti non ha fatto in tempo a risponderci. Il risultato positivo di questa domanda dimostra che il concetto di simmetria è abbastanza radicato negli studenti al III anno. Questo può derivare dal fatto che la prassi didattica colloca questo argomento sia nella scuola primaria sia nel II anno della scuola secondaria di I grado e quindi gli studenti hanno un duplice incontro con l'argomento.

Macroprocesso 2: RAPPRESENTAZIONI

Il macroprocesso “*Rappresentazioni*” comprende i processi 3 e 8 del QdR Invalsi così definiti:

- 3.** conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (*verbale, numerica, simbolica, grafica, ...*);
- 8.** riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione (*riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...*).

Le competenze relative al macroprocesso 2 riguardano la lettura e l'interpretazione delle diverse forme di rappresentazione matematica, la conversione da una all'altra e la corretta interpretazione delle rappresentazioni geometriche. Alla base dell'utilizzo di questi processi vi è una consapevolezza dell'oggetto matematico in sé e di come viene rappresentato. Più precisamente, accedendo agli oggetti matematici esclusivamente attraverso sistemi di rappresentazione, è cruciale per lo sviluppo di un concetto matematico avere a disposizione molteplici rappresentazioni in quanto ciascuna di esse concorre a mettere in luce certi aspetti dell'oggetto stesso (Duval, 2006). Molti quesiti si concentrano sulle conversioni da rappresentazioni verbali – simboliche – grafiche, ma altri ancora sulla diversa rappresentazione di oggetti matematici e sono proprio queste ultime competenze quelle più difficili da acquisire. Si richiede quindi una visione consapevole e unitaria della matematica, alla ricerca di possibili correlazioni tra sistemi di rappresentazioni diverse dello stesso oggetto.

Analizzando il numero di item delle prove SNV06 e PN2012 si registra una certa carenza di item coinvolti in questo macroprocesso in quanto sono complessivamente 10 su un totale di quasi 100 item (49 + 46) nelle due prove. Emerge inoltre che i suddetti processi sono distribuiti negli ambiti disciplinari in maniera differente, proprio a causa della natura diversa dei due processi: si nota infatti che il processo 3 si dispone trasversalmente nei diversi ambiti mentre il processo 8 è legato prettamente all'ambito Spazio e Figure (SF). La distribuzione degli item del macroprocesso 2 rispetto agli ambiti disciplinari è indicata nella seguente tabella:

livello	NUMERI		SPAZIO E FIGURE		DATI E PREVISIONI		RELAZIONI E FUNZIONI		TOTALE
	SNV06	PN2012	SNV06	PN2012	SNV06	PN2012	SNV06	PN2012	
Processo 3	0	1	0	0	1	0	1	1	4
Processo 8	0	0	2	4	0	0	0	0	6

Le domande spaziano da situazioni realistiche più legate alla vita quotidiana, fino a conoscenze geometriche più specifiche.

Nelle due tabelle seguenti è riportato l'elenco di tutti i quesiti appartenenti al macroprocesso 2 per la prova della I secondaria di I grado e per la Prova nazionale, con le loro principali caratteristiche.

I SECONDARIA DI I GRADO Prova SNV06						
domanda	ambito	Tipo di item	% corrette	% mancanti	processo	Difficoltà
D1_a	SF	MC	90,8	0,3	8	-2,7
D1_b	SF	RU	78,9	6,1	8	-1,6
D8	RF	MC	47,3	3,3	3	0,1
D12	DP	RU	62,4	1,4	3	-0,66
III SECONDARIA DI I GRADO Prova PN2012						
domanda	ambito	Tipo di item	% corrette	% mancanti	processo	Difficoltà
E1	SF	MC	97,7	0,2	8	-4,24
E11	NU	MC	26,2	2,8	3	1,53
E12_a	SF	RU	60,8	17,0	8	-0,51
E14_a	SF	RU	24,2	8,6	8	1,6
E14_b	SF	MC	32,2	4,8	8	1
E17_c	RF	MC	52,4	2,4	3	-0,11

Per quanto riguarda SNV06 tutti i quesiti si attestano su indici di difficoltà negativi o prossimi allo zero, mentre per PN2012 spiccano solamente due quesiti, E11 e E14a, con difficoltà medio-alta (indice di difficoltà 1,53 e 1,6), gli altri si attestano su basse difficoltà.

La tipologia di quesiti varia in modo omogeneo tra risposte a scelta multipla e la modalità a risposta univoca.

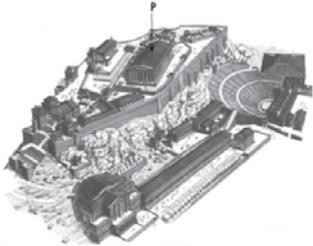
Cominciamo ad analizzare la domande D1 e E1, le prime dei due fascicoli e le più facili per SNV06 e PN2012. Esse presentano qualche similarità, infatti in entrambe si tratta di lavorare con rappresentazioni bidimensionali e tridimensionali.

La richiesta dell'item D1a si basa sulla capacità di lettura di una mappa di una rete metropolitana e di riconoscere le linee che passano per una determinata stazione, D2a richiede di tracciare il percorso minimo possibile tra due fermate. È interessante notare che entrambi possono essere letti in un'ottica di continuità verticale nell'insegnamento della matematica: il primo richiama la richiesta di rette passanti per due punti e il secondo i problemi di ricerca di minimo e massimo; possono quindi essere esempi di buone pratiche didattiche volte a fare emergere l'utilità della matematica, in situazioni semplici e vicine ai ragazzi, ma anche a innestare forme di pensiero tipiche di questa disciplina. I due item non hanno presentato difficoltà, le percentuali di risposta corretta infatti sono del 90,8% e 78,9%.

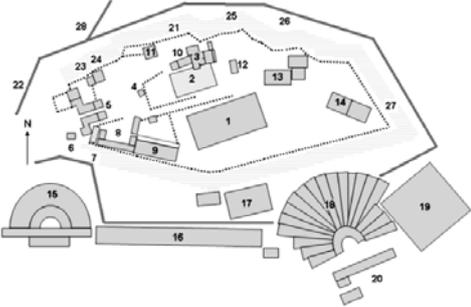
Strettamente legato alle competenze di questo quesito è l'item E1 in PN2012.

Qui si mira a valutare la competenza di passare dalla rappresentazione tridimensionale a quella bidimensionale. La domanda è a scelta multipla e si chiede di scegliere fra 4 opzioni dove di colloca un certo edificio su una vista dall'alto, essendo questo edificio mostrato precedentemente in una riproduzione tridimensionale.

E1. L'immagine qui sotto è una ricostruzione dell'Acropoli di Atene. L'edificio indicato con è il Partenone, tempio dedicato alla dea Atena.



Osserva ora questa piantina dell'Acropoli:



Quale numero riportato sulla piantina identifica il Partenone?

A. 19
 B. 17
 C. 14
 D. 1

Domanda E1		Frequenza	Percentuale
Validi	A. 19	2472	0,4
	B. 17	5218	0,9
	C. 14	4222	0,8
	D. 1	540461	97,7
	Non valida	123	0,0
	Mancante	882	0,2
	Totale	553379	100,0

Anche questo quesito non ha recato nessuna difficoltà, la percentuale di risposte corrette è stata 97,7%.

Prendiamo in considerazione ora la domanda D8 per quanto riguarda SNV06. La domanda è costituita da un unico item a scelta multipla. Si richiede la conversione da una rappresentazione verbale ad una simbolica, associando la giusta formula alla situazione illustrata dalla domanda. Si riportano di seguito il testo della domanda e i risultati ottenuti.

D8. A ogni compleanno, la nonna regala a Mario una somma di denaro in euro uguale a 5 volte l'età che compie. Quest'anno, oltre al solito regalo, la nonna dà a Mario 10 euro in più. Se N è il numero di anni che Mario compie quest'anno, quale delle seguenti formule esprime la somma ricevuta da Mario?

A. $10N + 5$
 B. $5N + 10$
 C. $N + 10$
 D. $N + 15$

Domanda D8	Frequenza	Percentuale
Validi A. $10N + 5$	80751	13,9
B. $5N + 10$	275393	47,3
C. $N + 10$	108622	18,7
D. $N + 15$	96904	16,7
Non valida	793	0,1
Non raggiunta	38	0,0
Mancante	19183	3,3
Totale	581684	100,0

La percentuale di risposte corrette è stata minore del 50% e ciò vuol dire che gli studenti hanno trovato difficoltà nella scelta della relazione. È importante interrogarsi sul motivo delle tante difficoltà incontrate. Introdurre situazioni da descrivere utilizzando simboli e lettere non dovrebbe essere considerato un obiettivo troppo elevato da raggiungere in questa fascia d'età. Potrebbe invece essere questo il momento opportuno per iniziare a introdurre l'utilizzo di semplici formule che aiutino a visualizzare proprietà (come ad esempio formule che indichino i numeri pari e dispari) e a prendere confidenza con semplici relazioni.

In PN2012 un item che misura l'abilità degli studenti a saper passare da un tipo di rappresentazione ad un'altra (in questo caso specifico da un registro verbale a una rappresentazione grafica) è l'item E17c. Tale item appartiene ad una domanda che è costituita da 3 item di cui l'E17c è l'ultimo. Il primo item di questa domanda appartiene al processo 2, il secondo al processo 7 e il terzo al processo 3. Qui di seguito vengono riportati i risultati oltre che dell'item E17c, anche di quello precedente (E17b) in quanto, pur trattando prevalentemente una situazione di modellizzazione matematica (quindi processo 7), comporta sempre un passaggio da un registro verbale a uno simbolico.

L'item E17b riguarda, infatti, la ricerca della giusta formalizzazione della relazione spiegata verbalmente nel testo. La richiesta è analoga a quella dell'item D8 di SNV06, ma in questo caso i risultati sono molto migliori, infatti si ha circa un 15% in più di risposte corrette. Tale risultato può essere interpretato in base al fatto che in III media gli studenti sono abituati a utilizzare le lettere per esprimere relazioni.

Nell'item E17c (vedi sotto il testo e i risultati ottenuti) in cui si chiede attraverso la scelta multipla di scegliere quale grafico rappresenta la formula già scelta nell'item b., i processi richiesti sono più raffinati.

E17. Paolo acquista una tessera che consente l'ingresso a prezzo ridotto per un anno a un cinema della sua città. Il costo della tessera è di 12 euro e permette di pagare il biglietto di ingresso solo 5 euro per ogni spettacolo.

a. Completa la seguente tabella, dove n è il numero degli spettacoli e S il costo complessivo della tessera e dei biglietti di ingresso.

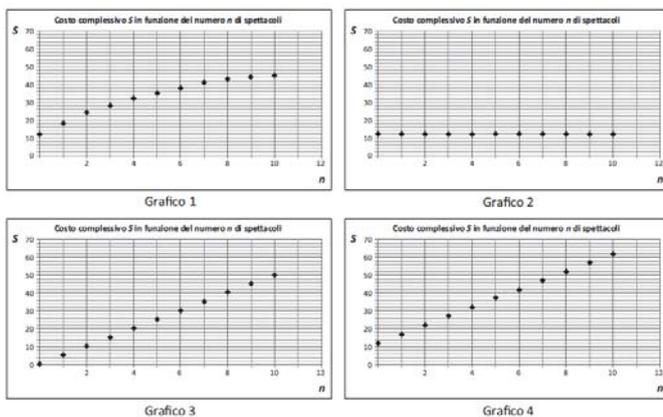
n (numero di spettacoli)	S (costo complessivo in euro)
0	12
1
2
3
4
5

b. Quale fra le seguenti formule consente di calcolare il costo complessivo S al variare del numero n di spettacoli?

- A. $S = 12 + 5n$
 B. $S = 12 + 5$
 C. $S = 12 + n$
 D. $S = 12n + 5n$

Item E17b	Frequenza	Percentuale
Validi A. $S = 12 + 5n$	345623	62,5
B. $S = 12 + 5$	82118	14,8
C. $S = 12 + n$	66834	12,1
D. $S = 12n + 5n$	33533	6,1
Non valida	657	0,1
Non raggiunta	108	0,0
Mancante	24506	4,4
Totale	553379	100,0

c. Osserva ora i grafici seguenti.



Quale grafico rappresenta come varia il costo complessivo S al variare del numero n di spettacoli?

- A. Grafico 1
 B. Grafico 2
 C. Grafico 3
 D. Grafico 4

Item E17c	Frequenza	Percentuale
Validi A. Grafico 1	75515	13,6
B. Grafico 2	31754	5,7
C. Grafico 3	142230	25,7
D. Grafico 4	289832	52,4
Non valida	653	0,1
Non raggiunta	125	0,0
Mancante	13269	2,4
Totale	553379	100,0

Come mostra la tabella riportata sopra, le risposte corrette si attestano su una percentuale del 52,4% evidenziando difficoltà nella comprensione di modelli lineari e nell'esprimere relazioni tra grandezze. La richiesta può essere esaminata su due livelli: un primo passaggio richiede il collegamento tra registro verbale e rappresentazione grafica, un secondo livello (più astratto e profondo) in cui si associa alla situazione descritta un modello lineare di crescita e quindi poi la scelta dello strumento grafico che rappresenti il giusto andamento. Al fine di un apprendimento più efficace e duraturo, è auspicabile proporre nella pratica didattica numerosi esempi, familiari e vicini ai ragazzi, a cui associare i differenti andamenti di grafici: dalla relazione di proporzionalità (diretta e indiretta), ai modelli lineari e quadratici per cogliere analogie e differenze, tipiche sempre del muoversi in matematica. Bisogna riflettere che proprio questi primi approcci alle relazioni lineari costituiscono la base per l'utilizzo di equazioni per affrontare la geometria analitica.

È interessante soffermarsi, sempre per quanto riguarda PN2012, sulla domanda E11 in quanto unico item, relativo al macroprocesso 2, attinente l'ambito numerico. L'item richiede di calcolare la decima parte di una potenza con base 10.

E11.	La decima parte di 10^{20} è
A.	<input type="checkbox"/> 10^{10}
B.	<input type="checkbox"/> 1^{20}
C.	<input type="checkbox"/> 100
D.	<input type="checkbox"/> 10^{19}

Domanda E11	Frequenza	Percentuale
Validi		
A. 10^{10}	171065	30,9
B. 1^{20}	138506	25,0
C. 100	82763	15,0
D. 10^{19}	144955	26,2
Non valida	785	0,1
Mancante	15305	2,8
Totale	553379	100,0

Il quesito è risultato mediamente difficile, infatti la percentuale 26,2 % di risposte corrette è molto bassa, addirittura i distrattori hanno ottenuto un numero di risposte maggiore o confrontabile con la risposta corretta. È da segnalare inoltre un consistente numero di risposte mancanti. Dalla distribuzione delle risposte emerge una certa confusione a lavorare simbolicamente con le potenze.

L'argomento si affronta di prassi in prima media, ma, nonostante ciò, il quesito ha rilevato forti criticità. Bisognava interpretare 'la decima parte di' come una divisione per 10, ma la cosa interessante è vedere quale numero è stato diviso per 10: alcuni hanno diviso l'esponente, alcuni la base, alcuni hanno tolto uno zero all'esponente (richiamo alla divisione per 10). I distrattori hanno saputo riportare i tipici errori di calcolo riguardanti le potenze di un numero. Oltre ad abbracciare il processo 3 l'item testa anche il processo 1 (conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica). Questo processo fa porre l'attenzione su come alcuni argomenti vengono trattati in classe. Ad esempio, nella prassi didattica, lo studio delle potenze comprende anche le proprietà a esse connesse, ma spesso gli esercizi che vengono dati sono di tipo meccanico, cioè esercizi in cui si applicano queste proprietà senza averle veramente assimilate. Errori comuni sono del tipo: $2^{10} - 2^3 = 2^7$ in cui gli studenti abusano di regole e giustificano i passaggi commessi appellandosi alle proprietà delle potenze!

A sostegno di quanto detto sopra, riportiamo adesso la domanda D10, molto simile alla domanda E11, presente nella prova della secondaria di II grado nell'anno 2011. Tale domanda composta da

un unico item a scelta multipla, chiede di scegliere l'espressione che esprime la metà di una potenza di un mezzo. Viene qui sotto riportato il testo e i relativi risultati.

D10. Qual è la metà del numero $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$?

A. $\left(\frac{1}{4}\right)^{50}$

B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{25}$

C. $\left(\frac{1}{2}\right)^{51}$

D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{49}$

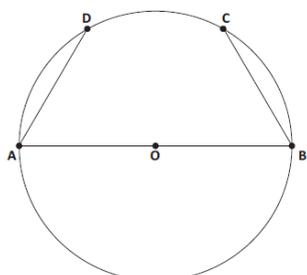
Domanda	Mancata risposta	OPZIONI			
		A	B	C	D
D10	1,0	19,8	59,2	12,1	8,0

Come si può vedere dalle percentuali molto basse di risposte corrette (8%), le difficoltà rispetto a questo tipo di domanda sono verticali e i tipi di comportamento sono anche molto simili (cfr. percentuali ottenute dai distrattori in questa domanda e nella domanda E11).

Le ultime due domande che vengono qui analizzate, E12 e E14, fanno parte di PN2012 e si riferiscono all'ambito Spazio e figure; tra questi il quesito E14a è risultato essere il più difficile all'interno del macroprocesso 2.

La domanda E12 è composta da due item: il primo a risposta univoca e il secondo a risposta aperta articolata. L'item E12a chiede di calcolare il perimetro di un trapezio, dopo aver completato la figura e riconosciuto la proprietà di essere isoscele. Il calcolo risulta semplice dato che la somma dei due lati è uguale alla base maggiore. L'item E12b chiede di giustificare la risposta data all'item precedente. Si riporta sotto il testo della domanda con la tabella dei risultati ottenuti.

E12. La circonferenza in figura ha il diametro di 10 cm e le corde AD e BC uguali al raggio.



a. Qual è il perimetro del quadrilatero ABCD?

Risposta: cm

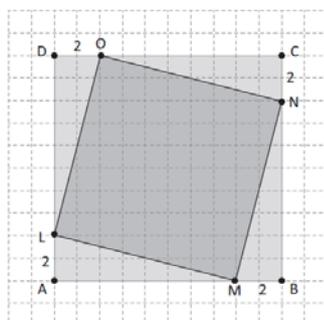
b. Giustifica la tua risposta.

.....

Item E12a		Frequenza	Percentuale
Validi	Errata	121128	21,9
	Corretta	336726	60,8
	Non valida	1196	0,2
	Mancante	94329	17,0
Totale		553379	100,0

Si tratta di lavorare con oggetti matematici conosciuti, eppure il quesito ha avuto la percentuale di risposte mancanti più elevata di tutti gli item appartenenti al macroprocesso 2. Bisogna interrogarsi su quanta importanza si dà nella prassi didattica alla costruzione in geometria e forse, per migliorare, si potrebbe pensare ad una più stretta collaborazione con i colleghi di tecnologia. Per quanto riguarda la domanda E14, il cui testo viene riportato sotto con la tabella dei risultati ottenuti, è composta da due item: il primo (E14a) a risposta aperta univoca e il secondo (E14b) a scelta multipla. L'item E14a richiede di calcolare l'area del quadrato LMNO e ciò si poteva fare in due diversi modi: o per differenza tra l'area del quadrato grande (100 cm^2) e le aree dei 4 triangoli rettangoli ($2 \times 8 : 2 \times 4 = 32 \text{ cm}^2$) oppure attraverso l'applicazione del teorema di Pitagora con il calcolo dell'area del quadrato costruito sull'ipotenusa. Nel quesito E14b, la competenza richiesta è di tipo più avanzato perché si tratta di 'muovere' e quindi trasformare un oggetto geometrico, anche se la tipologia di risposta a scelta multipla, lo rende meno difficile del primo.

E14. In un quadrato ABCD di lato 10 cm è inscritto un quadrato LMNO. I segmenti DO, CN, BM e AL sono uguali fra loro e ciascuno di essi misura 2 cm.

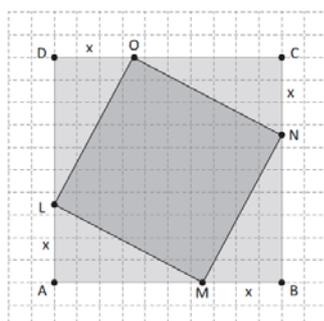


$$DO = CN = BM = AL = 2 \text{ cm}$$

a. Quanto misura l'area del quadrato LMNO?

Risposta: cm²

Immagina ora che i punti L, M, N e O si muovano lungo i lati del quadrato ABCD in modo tale che $DO = CN = BM = AL = x$. Al variare di x varia anche l'area del quadrato LMNO.



$$DO = CN = BM = AL = x$$

b. Per quale tra questi valori di x l'area del quadrato LMNO diventa minima?

- A. 1 cm
 B. 3 cm
 C. 5 cm
 D. 8 cm

Item E14a	Frequenza	Percentuale
Validi Errata	370727	67,0
Corretta	134110	24,2
Non valida	1122	0,2
Mancante	47420	8,6
Totale	553379	100,0

Item E14b	Frequenza	Percentuale
Validi A. 1 cm	80351	14,5
B. 3 cm	175778	31,8
C. 5 cm	178104	32,2
D. 8 cm	91562	16,5
Non valida	927	0,2
Non raggiunta	17	0,0
Mancante	26640	4,8
Totale	553379	100,0

Per quanto riguarda il primo item, molti studenti hanno calcolato l'ipotenusa dei triangoli attraverso il teorema di Pitagora, ma una volta arrivati alla $\sqrt{68}$, non avendo la calcolatrice a disposizione, non sono riusciti a calcolare il lato e quindi l'area e non hanno avuto la prontezza di riconoscere che il quadrato della $\sqrt{68}$ è esattamente 68. È risultato il quesito più difficile nell'ambito del macroprocesso 2 (67,0 % risposte errate).

Le difficoltà incontrate dai ragazzi in questi due ultimi quesiti segnalano una possibile scarsa abitudine a trattare la geometria in classe in modo approfondito e non mnemonico e, probabilmente, per quanto riguarda l'item b., a utilizzare in classe software di geometria dinamica. Si rende noto che la ricerca di area minima è un tipico problema di base di matematica che ricorda i problemi di minimo e massimo alla base dei quesiti delle superiori e dell'agire matematico. Ricorrendo a pratiche didattiche che mettano in luce relazioni tra variabili, andamenti qualitativi e visualizzazioni pratiche queste tematiche possono essere introdotte anche nella fascia d'età della scuola secondaria di primo grado.

Macroprocesso 3: MODELLIZZAZIONE

Il macroprocesso 3, denominato “Modellizzazione” include i processi 4, 5 e 7 del QdR Invalsi, così definiti:

<p>4. risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico - (<i>individuare e collegare le informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive, confrontare strategie di soluzione, descrivere e rappresentare il procedimento risolutivo...</i>).</p>
<p>5. riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze (<i>saper individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, stimare una misura,...</i>).</p>
<p>7. utilizzare strumenti, modelli e rappresentazioni nel trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (<i>descrivere un fenomeno in termini quantitativi, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, ...</i>).</p>

Il terzo macroprocesso è quello prevalentemente coinvolto in quesiti che richiedono la “matematizzazione” di una situazione problematica, cioè la trasformazione di una situazione del mondo reale in un modello matematico.

L'attivazione dei processi 4, 5, e 7, risulta mediamente difficile per una percentuale elevata di alunni, tuttavia si può rilevare che, nel passaggio dalla classe II della scuola primaria alla classe II della scuola secondaria di II grado, le competenze relative ai processi di modellizzazione sono raggiunte da un numero progressivamente crescente di alunni.

In SNV06, gli item relativi al macroprocesso “Modellizzazione” sono 26 (ripartiti in 14 domande) su un totale di 49 item, mentre nella PN2012 essi sono 15 (ripartiti in 10 domande) su un totale di 46 item .

Gli ambiti di contenuto coinvolti nei quesiti di modellizzazione sono indicati nella seguente tabella:

DISTRIBUZIONE DEGLI ITEMS RELATIVI AL GRUPPO 3 (MODELLIZZAZIONE) IN BASE AGLI AMBITI DISCIPLINARI					
	NUMERO	SPAZIO E FIGURE	RELAZIONI E FUNZIONI	DATI E PREVISIONI	TOTALE
SNV06	5	3	8	10	26
PN2012	4	3	5	3	15

Nell'ambito dei processi di modellizzazione, la capacità di risolvere problemi è rappresentata dal processo 4, individuato come prevalente in 12 item della prova SNV06 e in 5 item della prova PN2012. In SNV06, mediamente gli alunni hanno fornito una risposta corretta a questi item solo nel 35,3% dei casi (con percentuali variabili dal 13,5% dell'item D17c al 77,8% dell'item D11a); nella prova PN2012 la percentuale di risposte corrette a questo tipo di quesiti è mediamente del 49,0% (valori compresi tra il 32,4% dell'item E8b e il 72,1% dell'item E23).

Le difficoltà riscontrate dagli alunni in questo tipo di domande possono essere in gran parte legate a una corretta lettura e interpretazione del testo del problema e, in secondo luogo, all'utilizzo autonomo di strumenti tipicamente matematici che permettano una corretta conversione dal campo narrativo della situazione proposta a quello razionale del modello matematico.

I problemi proposti nelle prove fanno riferimento a situazioni realistiche in gran parte dei casi, ma spesso non si discostano significativamente da contesti più tipici della didattica tradizionale. L'esito così variabile dei risultati relativi alle singole domande richiede tuttavia un'analisi più dettagliata di alcuni esempi significativi.

La prima domanda che viene qui proposta è la domanda D9 della prova SNV06 e appartenente all'ambito Numeri. Viene data un'espressione numerica e, attraverso la scelta multipla, si chiede di scegliere quale problema possa essere modellizzato tramite tale espressione. Si riporta sotto il testo della domanda e la tabella con i risultati ottenuti.

D9. Osserva questa espressione: $3 \cdot 3 + 6 : 3$

Quale dei seguenti problemi può essere risolto con l'espressione nel riquadro? Segna con una crocetta il problema.

La mamma compra per ognuno dei suoi tre bambini un quaderno che costa tre euro. Compra anche sei euro di materiale vario per la scuola. Quanto spende in tutto per ogni bambino?	Luigi compra per sé tre confezioni da tre matite ciascuna. Compra anche una confezione da 6 matite che divide con i suoi due fratelli. Quante matite ha in tutto Luigi?	Tre amiche comprano ognuna tre caramelle e sei cioccolatini. Si dividono i dolci tra loro in parti uguali. Quanti dolci avrà ognuna di loro?	Mario fa a piedi tre chilometri al giorno per tre giorni consecutivi; il giorno successivo fa sei chilometri. Quanti chilometri ha fatto in media al giorno?
Problema A <input type="checkbox"/>	Problema B <input type="checkbox"/>	Problema C <input type="checkbox"/>	Problema D <input type="checkbox"/>

Domanda D9	Frequenza	Percentuale
Validi Problema A	148546	25,5
Problema B	165418	28,4
Problema C	181227	31,2
Problema D	73338	12,6
Non valida	1947	0,3
Non raggiunta	38	0,0
Mancante	11170	1,9
Totale	581684	100,0

I problemi della domanda D9, presi singolarmente, si inseriscono nel contesto della didattica più tradizionale della scuola primaria così come all'alunno della classe I della scuola secondaria è richiesto abitualmente di riuscire a tradurre il procedimento risolutivo di un problema in una singola espressione.

In questo caso il percorso proposto è di tipo inverso e si richiede di attribuire in modo univoco il modello matematico iniziale (l'espressione risolutiva) ad una delle quattro situazioni narrative.

Un alunno abile in questo tipo di esercizio potrebbe rapidamente modellizzare le quattro situazioni problematiche e confrontare le relative espressioni con quella iniziale indicando il Problema B come corrispondente all'espressione data:

Problema A: $(3 \cdot 3 + 6) : 3$

Problema B: $3 \cdot 3 + 6 : 3$

Problema C: $3 \cdot (3 + 6) : 3$

Problema D: $(3 \cdot 3 + 6) : 4$

I risultati mettono in mostra che i distrattori A, C e D convogliano un numero molto elevato di risposte (in misura minore l'opzione D, in cui si richiede di effettuare una media su 4 giorni, forse anche perché il contesto narrativo è differente rispetto ai tre precedenti).

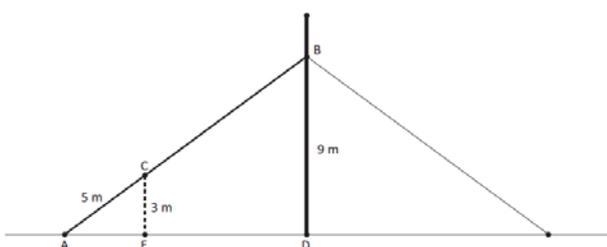
Il fatto che le opzioni A e C siano scelte rispettivamente dal 25,5% e dal 31,2% degli alunni (contro un 28,4% di risposte corrette), mette in evidenza un'elevata difficoltà a distinguere le tre situazioni iniziali sul piano concreto della situazione proposta (comprensione del testo), oppure una scarsa assimilazione delle regole sintattiche di base, tipiche delle espressioni numeriche (uso delle parentesi). Difatti, prescindendo dall'uso delle parentesi, le tre espressioni relative ai Problemi A, B e C sono identiche.

Assumendo che la maggior parte degli alunni sia in grado di risolvere correttamente semplici espressioni numeriche con l'uso di parentesi, l'aspetto critico messo qui in luce è relativo alla capacità di individuare un senso concreto nell'applicazione delle regole in oggetto. Lo sviluppo di tale capacità non può prescindere da una prassi didattica che spinga alla rappresentazione sintetica della successione delle operazioni risolutive di un problema attraverso un'unica espressione e che permetta un graduale abbandono dei procedimenti "step by step", tipici della scuola primaria.

La domanda D9, modellabile su tutti gli ambiti della matematica e per tutte le età degli alunni, può rappresentare uno stimolo per lo svolgimento di attività più complesse legate alla comprensione del testo di un problema e alla rappresentazione del procedimento risolutivo attraverso espressioni numeriche, anche attraverso lo stimolo dell'invenzione di testi di problemi a partire da un'espressione. In modo inverso possono essere proposte diverse espressioni risolutive per uno stesso problema, chiedendo agli alunni di individuare quella corretta. Quest'ultima attività non si risolve necessariamente in un quesito a risposta multipla in quanto, scegliendo problemi di complessità crescente, è possibile fornire esempi di espressioni risolutive formalmente diverse ma equivalenti e ugualmente coerenti con la situazione problematica proposta. In particolare, molti problemi di geometria si prestano a questo scopo perché possono essere affrontati con un ordine variabile delle operazioni da svolgere; in questo modo è possibile chiedere agli alunni di individuare il procedimento risolutivo corrispondente ad ognuna delle espressioni fornite al fine di farli riflettere sulla molteplicità delle strategie risolutive.

Nell'ambito Spazio e figure è interessante analizzare la domanda E16 proposta nella prova PN2012. In questa domanda, la comprensione della situazione descritta nella consegna non risulta di fondamentale importanza, visto che il problema è accompagnato da una figura ampiamente esplicativa, che conferisce un carattere di estrema immediatezza alla richiesta. E' riportato sotto il testo della domanda e la tabella con i risultati ottenuti nel primo item.

E16. Il cavo (AB) di un ripetitore per telefonia cellulare è stato fissato a un palo a una distanza dal suolo di 9 m.
Una lampada di segnalazione (C) viene agganciata al cavo a 3 m di altezza e a 5 m dal punto di ancoraggio a terra (A).



a. Qual è la lunghezza del cavo AB?
Risposta:

b. Giustifica la tua risposta.
.....
.....
.....

Item E16a	Frequenza	Percentuale
Errata	113813	20,6
Corretta	280414	50,7
Non valida	1138	0,2
Non raggiunta	83	0,0
Mancante	157931	28,5
Totale	553379	100,0

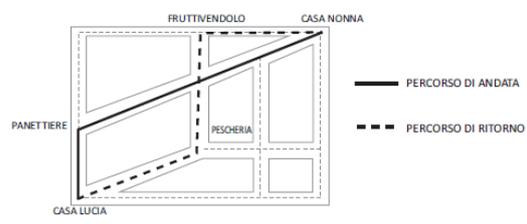
Come si può osservare nella tabella, l'item E16a ha fatto registrare un numero abbastanza elevato di risposte corrette (50,7%), ma anche una percentuale significativa di omissioni (28,5%).

I motivi degli insuccessi possono essere ricercati nella difficoltà di individuare un modello geometrico adeguato tra quelli conosciuti. E' naturale pensare che la presenza di due triangoli rettangoli nel disegno (AEC e ADB), induca inizialmente gli alunni all'applicazione del modello "Teorema di Pitagora". Questa scelta, indotta maggiormente dalla facile individuazione della terna pitagorica 3-4-5 al triangolo AEC, potrebbe accompagnare gli alunni verso la corretta soluzione. La corrispondenza del segmento DB di 9 m con il segmento CE di 3 m, anche lasciando implicita l'individuazione del modello "Similitudine", potrebbe già da sola suggerire l'applicazione della terna pitagorica derivata 9-12-15.

La possibilità di giungere intuitivamente alla risposta corretta, senza riuscire comunque a razionalizzare l'applicazione di un modello di proporzionalità tra i lati corrispondenti dei due triangoli, è confermata dal divario tra la percentuale di risposte corrette all'item E16a rispetto a quella dell'item E16b (32,3%), in cui si chiedeva di giustificare la risposta.

Sempre nell'ambito Spazio e figure, per la prova SNV06, troviamo la domanda D7 composta da un item a risposta aperta articolata. Questa domanda, sempre appartenente al macroprocesso "Modellizzazione", ma più legata al processo 5 sulla misura, chiede di confrontare le lunghezze fra due percorsi diversi da compiere a piedi facendo diverse tappe. Tale consegna si configura come problema geometrico risolvibile attraverso due diverse strategie: l'approccio diretto, legato alla misura dei due percorsi, e l'approccio più teorico, che chiama in causa le proprietà delle figure geometriche (la congruenza dei lati opposti del parallelogramma e la disuguaglianza triangolare). Pertanto, in questo caso, non si prevede necessariamente l'azione della misurazione, ma la risoluzione del problema può comportare una riflessione sulla lunghezza relativa di segmenti o di somme di segmenti. Nel seguito sono riportati il testo della domanda e la tabella con i risultati ottenuti.

D7. Lucia esce da casa sua, va a comprare il pane per la nonna e glielo porta a casa. Al ritorno, fa un'altra strada e si ferma prima dal fruttivendolo e poi in pescheria per fare alcuni acquisti per la mamma. Nella mappa in figura sono rappresentati i percorsi fatti da Lucia per andare e tornare da casa sua a casa della nonna.



Sì, perché

 No, perché

Domanda D7	Frequenza	Percentuale
Errata	476522	81,9
Corretta	74587	12,8
Non valida	5638	1,0
Non raggiunta	38	0,0
Mancante	24898	4,3
Totale	581684	100,0

Il confronto tra le strategie utilizzate con successo da diversi gruppi di alunni, può costituire un'interessante attività da svolgere in classe; allo stesso tempo, la riflessione sulla lunghezza relativa di percorsi alternativi può essere sviluppata utilizzando altre mappe stradali che possano mettere in luce proprietà geometriche di diverse figure; infine, la ricerca del percorso più corto può essere trasformata in chiave ludica imponendo dei vincoli (sensi unici e sensi vietati) a un tragitto da percorrere in automobile.

Relativamente ai risultati ottenuti, stupisce una percentuale estremamente ridotta di risposte corrette (12,8%) a fronte di un numero comunque contenuto di omissioni (4,3%).

Perlopiù si sono registrati due tipi di interferenze, facilmente deducibili dalla lettura delle risposte aperte e legate alla comprensione della situazione problematica o all'utilizzo di un modello matematico adeguato; entrambe le tipologie di interferenza chiamano in causa il fattore "tempo di percorrenza", assente dal testo del problema e dalla consegna (con quale percorso Lucia "fa più strada"?).

Nel primo caso si considera "più lungo" il percorso tratteggiato perché "Lucia fa più curve", ipotizzando, cioè, un rallentamento ad ogni cambio di direzione; nel secondo caso, allo stesso modo si considera "più lungo" il percorso tratteggiato perché "Lucia fa due soste invece di una".

Queste due tipologie di risposta indicano, non solo una sovrapposizione logica tra il concetto di "lunghezza del percorso" e l'idea intuitiva di "velocità di percorrenza" ad essa associata (cioè tra lunghezza spaziale e lunghezza temporale), ma anche e soprattutto una difficoltà radicata di distaccarsi dall'ambito prettamente "narrativo" per adottare il "modello matematico" sotteso alla narrazione; in questo modo, ad esempio, le soste dal fruttivendolo e in pescheria, non vengono individuate come ininfluenti ai fini della riflessione sulla misura del tragitto, e finiscono per influenzare la qualità della risposta finale.

A questo proposito, risulta pertanto sostanziale la richiesta della giustificazione della risposta, che mette in luce l'interferenza di modelli di ragionamento più o meno adeguati in termini matematici (in assenza di questo tipo di analisi la maggior parte degli alunni avrebbe, infatti, risposto correttamente che il percorso tratteggiato è il più lungo dei due). È pertanto auspicabile che la richiesta di esplicitazione del ragionamento seguito diventi una prassi nella didattica del problema matematico, così come la formulazione di testi di tipo situazionale (cioè coerenti con la risoluzione

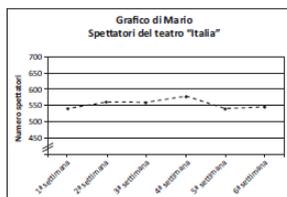
di situazioni problematiche realistiche) può aiutare l'insegnante a comprendere la reale capacità dell'alunno di attingere dalla situazione stessa i soli elementi utili alla costruzione di un modello risolutivo adeguato.

All'interno del macroprocesso "Modellizzazione" è situato anche il processo 7 che comprende gli aspetti più applicativi del ragionamento matematico; le domande coinvolte da tale processo (3 domande e 6 item nella prova SNV 6; 3 domande e 5 item nella prova PN2012) presentano spesso, infatti, grafici e tabelle da cui trarre informazioni per la risoluzione di un problema legato ad una situazione realistica. È naturale, pertanto, che l'ambito di riferimento privilegiato in questo caso sia quello di Dati e previsioni (o, in alternativa, Relazioni e funzioni). Nell'ambito Dati e previsioni, analizziamo l'item D2a, a risposta a scelta multipla, della prova SNV06. Il testo è riportato qui di seguito con i relativi risultati:

D2. Nella seguente tabella è riportato il numero degli spettatori del teatro "Italia" durante un periodo di 6 settimane.

Settimana	Spettatori
1ª Settimana	540
2ª Settimana	560
3ª Settimana	558
4ª Settimana	576
5ª Settimana	540
6ª Settimana	545

Per rappresentare questi dati Mario e Giovanni hanno costruito i due grafici seguenti.



a. Quale di queste affermazioni è corretta?

- A. Solo il grafico di Mario rappresenta correttamente i dati
- B. Solo il grafico di Giovanni rappresenta correttamente i dati
- C. Tutti e due i grafici rappresentano correttamente i dati
- D. Nessuno dei due grafici rappresenta correttamente i dati

Domanda D2a	Frequenza	Percentuale
A. Solo il grafico di Mario rappresenta correttamente i dati	36985	6,4
B. Solo il grafico di Giovanni rappresenta correttamente i dati	234091	40,2
C. Tutti e due i grafici rappresentano correttamente i dati	291091	50,0
D. Nessuno dei due grafici rappresenta correttamente i dati	13123	2,3
Non valida	965	0,2
Mancante	5429	0,9
Totale	581684	100,0

Questo quesito, come la maggior parte di quelli coinvolti in particolare dal processo 7, include, oltre a competenze di Modellizzazione, anche abilità legate alla Rappresentazione e all'utilizzo di diversi registri di rappresentazione. In questo caso i dati della tabella sono trasferiti in due grafici diversi e si richiede all'alunno di valutare la correttezza dei due tentativi di trasposizione. Entra in gioco il binomio correttezza/adequatezza di una rappresentazione, in quanto, se è vero che i due diagrammi sono entrambi corretti, una percentuale molto consistente di alunni (40,2%) ha scartato la rappresentazione di Mario perché meno "leggibile", quindi meno adeguata di quella di Giovanni. Questo aspetto si presenta delicato in termini didattici perché è molto difficile trasmettere agli alunni il senso di una rappresentazione grafica in termini di immediatezza di lettura, capacità di comunicazione e valore "estetico". La pratica didattica, pertanto, deve cercare di tenere distinti i due piani di valutazione e allo stesso tempo l'insegnante può affinare le abilità dei propri alunni, lasciandoli liberi di scegliere la scala da applicare agli assi nelle rappresentazioni grafiche e confrontando poi i diversi risultati prodotti in una classe.

Seppur il grafico non è di immediata lettura, a causa della ridondanza della doppia linea delle fermate, una volta individuati i punti di partenza e di arrivo, due terzi degli alunni (65,9%) hanno saputo riconoscere che Lorenzo non passerà da Mare Rocce nel suo viaggio verso la scuola perché Mare Rocce è una fermata precedente rispetto al suo punto di partenza. E' importante sottolineare, in questo item, che la tipologia di domanda si configura come risposta multipla ma contiene al suo interno sia la scelta binaria (SI/NO) che la scelta di una giustificazione adeguata (SI perché...; NO perché); in questo modo si riesce ad indagare in modo abbastanza immediato sulla reale comprensione della situazione da parte dell'alunno senza appesantire la richiesta con una domanda aperta e verificando al contempo competenze di tipo logico.

L'item E22b, al contrario, presenta l'intero tabulato del percorso con gli orari di passaggio dell'autobus in ciascuna delle fermate; la richiesta è quella di individuare l'orario di partenza e quello di arrivo, sia nel percorso di andata (prima delle ore 8.30), sia in quello di ritorno verso casa (dopo le ore 13.30).

Il tabulato è fittissimo di dati (per ogni zona attraversata dall'autobus ci possono essere più fermate) e richiede di compiere diverse operazioni in successione: riconoscere la tabella dell'andata e quella del ritorno; individuare, in ognuno dei due casi la fermata di partenza e quella di arrivo; individuare, in ognuno dei due casi, la colonna con gli orari di arrivo e partenza compatibili con le condizioni poste dal problema.

La sovrabbondanza di dati rappresenta la sfida posta agli alunni, che comunque hanno risposto per il 44,7% in modo corretto (ma la percentuale delle omissioni è stata comunque elevata, 13,3%).

In questo senso, la domanda E22 si configura come la naturale evoluzione della domanda D21 proposta per le classi I, in cui compare un tabulato di orari di treni. La competenza matematica sottesa a questo tipo di quesiti è di livello base ed ha una corrispondenza reale e immediata con le necessità della vita quotidiana; le complicazioni legate alla sovrabbondanza di dati dei tabulati proposti non sono altro che un aspetto di tale corrispondenza con le situazioni concrete. Pertanto, se è vero che alunni di 11 o 13 anni non hanno ancora una forte familiarità con questo tipo di situazioni (o almeno non tutti allo stesso modo), è allo stesso tempo indispensabile che la scuola dell'obbligo si adoperi per fornire gli strumenti per l'acquisizione di tali competenze.

D21. Osserva il seguente orario ferroviario del treno ad alta velocità "Frecciargento". Nell'intestazione delle colonne è riportato il numero del treno (ad es. AV9402).

	AV9400	AV9402	AV9404	AV9406	AV9408
Roma Termini	06.45	07.45	08.45	09.45	10.45
Firenze S. M. Novella	a F -	F 09.20	F 10.20	F 11.20	F 12.20
Firenze S. M. Novella	p R -	R 09.30	R 10.30	R 11.30	R 12.30
Bologna Centrale	a E -	E 10.07	E 11.07	E 12.07	E 13.07
Bologna Centrale	p C -	C 10.10	C 11.10	C 12.10	C 13.10
Ferrara	C I	C 10.33	C I	C I	C I
Rovigo	I I	I I	I 11.45	I I	I I
Padova	A 09.51	A 11.07	A 12.07	A 13.07	A 14.07
Venezia Mestre	a R 10.05	R 11.21	R 12.21	R 13.21	R 14.21
Venezia S. Lucia	a G 10.17	G 11.33	G 12.33	G 13.33	G 14.33

a. Quale treno non ferma a Bologna Centrale?
 Risposta: il treno numero

b. A che ora parte da Roma Termini il treno numero AV9408?
 Risposta:

Macroprocesso 4: ARGOMENTAZIONE

Il macroprocesso 4, denominato *argomentazione* include al suo interno il solo processo 6 del QdR Invalsi, così definito:

8. acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (*congetturare, argomentare, verificare, definire, generalizzare, ...*).

Si tratta di un processo anche esso strettamente connesso alle Indicazioni Nazionali per il Curricolo 2007 (“*impara a costruire ragionamenti (se pure non formalizzati) e a sostenere le proprie tesi*” già al termine della scuola primaria, e successivamente “*è capace di sostenere le proprie convinzioni, portando esempi e contro esempi adeguati e argomentando attraverso concatenazioni di affermazioni*” al termine della scuola secondaria di primo grado) e alle Indicazioni 2012 (“*Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite*”).

La tabella 8 riassume tutti i quesiti appartenenti a questo processo sia per SNV06 sia per PN2012, con le loro principali caratteristiche di ambito di appartenenza, di tipologia di item e di risultati ottenuti.

Tabella 8

I Secondaria di Primo Grado – SNV06					
domanda	ambito	Tipo di item	% corretta	% mancanti	difficoltà
D2b	DP	RG	30,5	10,3	0,95
D3a	RF	RU	85,8	3,2	-2,19
D14	SF	RU	24,1	10,5	1,37
D24	SF	MC	38,3	2,5	0,53
D26	N	MC	33	5,6	0,82

III Secondaria di Primo Grado – PN2012					
domanda	ambito	Tipo di item	% corretta	% mancanti	difficoltà
E3b	DP	RG	62,3	12,6	-0,81
E5	RF	MC	57,1	1,5	-0,27
E6	SF	MC	24,1	1,6	1,5
E9_b	RF	MC	42,4	3,8	0,37
E12_b	SF	RG	42,0	27,4	0,26
E13	N	MC	34,0	1,5	0,89
E16_b	SF	RG	32,3	42,1	0,79

Come si può osservare, per quanto riguarda sia SNV06 sia PN2012 i quesiti del processo 6 appartengono prevalentemente agli ambiti Spazio e figure e Relazioni e funzioni (in SNV06 sono 3 su 5 in totale e in PN2012 sono 5 su 7 in totale) e sono per la maggior parte della tipologia a scelta multipla oppure a risposta aperta articolata.

Fanno parte di questo processo i quesiti che chiedono:

- i) di produrre per iscritto un’argomentazione o una spiegazione o giustificazione di una scelta operata;
- ii) di riconoscere un’argomentazione corretta;

iii) di operare una deduzione, senza necessariamente esplicitarla, per poter determinare la/le risposta/e.

Tra gli item di quest'ultima tipologia, quello che richiede di completare una sequenza (D3a), è l'unico di tutto il macro-processo che mostra in SNV06 una percentuale di risposte corrette molto alta e un indice di difficoltà negativo superiore a -2, che sta ad indicare che la domanda è risultata particolarmente facile.

I restanti item del macroprocesso "Argomentazione" in SNV06 mostrano basse percentuali di risposte corrette e indici di difficoltà tutti positivi e questo conferma quanto detto in precedenza riguardo le *performance* degli studenti nei diversi processi (Figura 3): Argomentazione è il processo le cui prestazioni degli studenti sono le peggiori.

Per quanto riguarda gli studenti della III classe della scuola secondaria di I grado, sebbene il grafico delle *performance* nei diversi processi mostri un profilo molto diverso da quello di SNV06 (Figura 4), il dato negativo si conferma.

Per quanto riguarda gli ambiti di contenuto, le percentuali di risposte corrette più basse si hanno, sia in SNV06 sia in PN2012, nei quesiti di Spazio e figure

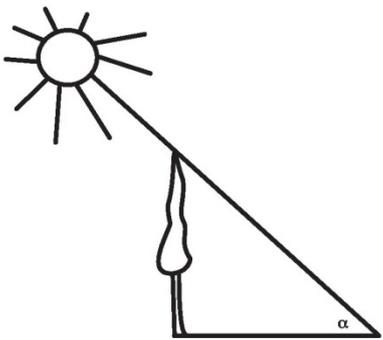
Tra tutti gli item a risposta aperta di questo processo in PN2012, quelli nei quali è chiesto di produrre per iscritto un'argomentazione presentano basse percentuali di risposte corrette e, forse ancor più significativo, un alto livello di non risposte. E questo dato conferma quanto già detto in precedenza: il processo "Argomentazione" è quello che presenta le maggiori difficoltà ai nostri studenti.

Tuttavia, ad una più attenta analisi delle risposte fornite dagli alunni e delle griglie di correzione degli item, emerge come la tipologia di quesiti che sembra mettere maggiormente in difficoltà gli studenti sia quella in cui è previsto che essi riconoscano (ed eventualmente esplicitino) un elemento del ragionamento che si configura come chiave di volta per una corretta argomentazione – e questo in una dimensione di sviluppo diacronico prelude alla richiesta di produrre una vera e propria dimostrazione formalizzata (II secondaria di secondo grado).

Analizziamo ora alcuni item in particolare.

SNV06 – D14

D14. La lunghezza dell'ombra di un albero varia durante il giorno a seconda dell'altezza del sole sull'orizzonte.



Quanto deve misurare l'angolo α affinché l'altezza dell'albero e la lunghezza della sua ombra diventino uguali?

Risposta:°

Domanda D14		Frequenza	Percentuale
Validi	Errata	379406	65,2
	Corretta	139936	24,1
	Non valida	777	0,1
	Non raggiunta	328	0,1
	Mancante	61236	10,5
Totale		581684	100,0

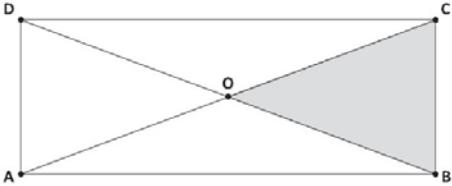
Si tratta di un quesito di Spazio e Figure in cui, dalla griglia di correzione, è accettabile un solo risultato (45°). Questa richiesta tende ad escludere chi si appoggia sulla misura diretta dell'ampiezza dell'angolo privilegiando chi riconosce il modello geometrico sottostante (triangolo rettangolo isoscele) e riesce coerentemente a sfruttarne le proprietà. Sebbene il triangolo isoscele sia ampiamente trattato sia nella scuola primaria sia nella prima classe di scuola secondaria di I grado, la percentuale di risposte corrette non arriva al 30%. Ciò suggerisce che, nonostante non fosse richiesta un'argomentazione verbale, la necessità di una deduzione diretta degli studenti costituisca, a questo livello scolare, un'attività alla quale si tende a preferire o una classificazione tassonomica o l'apprendimento mnemonico dei ragionamenti. In entrambi i casi, traslando leggermente il contesto (il triangolo in astratto diventa un sistema albero-ombra) ci si accorge che in realtà non si è ottenuto apprendimento.

Nella Prova nazionale, un quesito che offre tanti spunti di riflessione per il lavoro in classe, è l'E6 in cui viene chiesto di riconoscere l'argomentazione corretta tra quattro distrattori caratterizzati dal presentare due alternative a sostegno del No e due alternative a sostegno del Sì. Le percentuali di risposte per ciascuno di essi evidenziano come siano tutti fortemente attraenti, con una prevalenza di scelte per il No (57,7%) rispetto al Sì (40,5 %). Il primo distrattore offre una informazione corretta (i quattro triangoli non sono tutti uguali tra loro) come argomentazione (non corretta) per il No, tendendo ad avvalorare l'idea, piuttosto pericolosa a livello didattico, che alla base della rappresentazione dei numeri razionali nel registro geometrico ci sia la divisione della figura "in tante parti *uguali*". Il secondo distrattore, invece, probabilmente attrae tutti quegli studenti che tendono a rimanere ancorati a procedure di calcolo numerico come unica strada per la risoluzione dei problemi. L'ultimo distrattore, al quale corrisponde la percentuale più bassa di scelte, presenta un'informazione corretta (i quattro triangoli sono effettivamente isosceli) come argomentazione (sbagliata) per il Sì.

Di seguito è riportato il testo della domanda e la tabella con i risultati ottenuti.

PN2012 – E6

E6. In figura è rappresentato il rettangolo ABCD con le sue diagonali. Se conosci l'area del rettangolo, puoi calcolare l'area del triangolo in grigio?



A. No, perché i quattro triangoli di vertice O non sono tutti uguali fra loro

B. No, perché non conosco le dimensioni del rettangolo

C. Sì, perché i quattro triangoli di vertice O sono equivalenti

D. Sì, perché i quattro triangoli di vertice O sono isosceli

Domanda E6	Frequenza	Percentuale
A. No, perché i quattro triangoli di vertice O non sono tutti uguali fra loro	148980	26,9
B. No, perché non conosco le dimensioni del rettangolo	170507	30,8
C. Sì, perché i quattro triangoli di vertice O sono equivalenti	133346	24,1
D. Sì, perché i quattro triangoli di vertice O sono isosceli	90962	16,4
Non valida	723	0,1
Mancante	8861	1,6
Totale	553379	100,0

Altri due quesiti interessanti, di cui il primo afferisce all'ambito Numeri e il secondo all'ambito Relazioni e Funzioni, sono il D26 per l'SNV06 e l'E5 per la PN2012. L'oggetto di riflessione è, in entrambi i casi, il tema dei numeri (pari e dispari). Nel quesito D26 la percentuale di risposte corrette si ferma al 33% sebbene non sia richiesto né di produrre né di riconoscere un'argomentazione corretta. È interessante osservare che il primo distrattore raccoglie una percentuale di risposte paragonabile alla risposta corretta. Questo suggerisce da una parte che il tema del *multiplo* si conferma un nodo delicato per la classe prima secondaria di primo grado e dall'altra che la presenza di una variabile (la lettera a) non induce alla sua sostituzione con un numero naturale, anche se chiaramente suggerito, probabilmente perché il numero da sostituire non è espressamente indicato.

Il quesito E5 chiede invece di riconoscere l'argomentazione corretta relativa a pari e dispari e, così formulato, presenta una percentuale di risposte corrette superiore al 50%. È interessante osservare che, sebbene il testo della domanda presenti una formulazione più astratta rispetto al quesito D26 ("Se a è un numero..." rispetto a "Se si sostituisce a con un numero..."), è ipotizzabile che, nel passare dalla classe prima alla classe terza, la strategia di sostituire la lettera con il numero sia utilizzata (con successo) da un numero maggiore di alunni. E questa ipotesi pare avvalorata dalle basse percentuali di scelta degli altri distrattori.

SNV06 D26

D26. Osserva la seguente espressione.

$$(35 + a) \cdot 2 =$$

Se si sostituisce a con un numero naturale, il risultato

A. sarà sempre un multiplo di a

B. sarà sempre un multiplo di 35

C. sarà sempre un numero dispari

D. sarà sempre un numero pari

Domanda D26	Frequenza	Percentuale
A. sarà sempre un multiplo di a	175471	30,2
B. sarà sempre un multiplo di 35	85406	14,7
C. sarà sempre un numero dispari	86358	14,8
D. sarà sempre un numero pari	191835	33,0
Non valida	1247	,2
Non raggiunta	8806	1,5
Mancante	32561	5,6
Totale	581684	100,0

PN2012 E5

E5. Se a è un numero dispari, quale delle seguenti affermazioni, relative a $3(a+1)$, è corretta?

A. $3(a+1)$ è dispari, perché il triplo di un numero è dispari

B. $3(a+1)$ è dispari, perché il prodotto di due numeri dispari è dispari

C. $3(a+1)$ può essere pari o dispari, perché, per esempio, $3 \times 2 = 6$ e $3 \times 5 = 15$

D. $3(a+1)$ è pari, perché $(a+1)$ è un numero pari

Domanda E5	Frequenza	Percentuale
A. $3(a+1)$ è dispari, perché il triplo di un numero è dispari	34623	6,3
B. $3(a+1)$ è dispari, perché il prodotto di due numeri dispari è dispari	59413	10,7
C. $3(a+1)$ può essere pari o dispari, perché, per esempio, $3 \times 2 = 6$ e $3 \times 5 = 15$	134355	24,3
D. $3(a+1)$ è pari, perché $(a+1)$ è un numero pari	316248	57,1
Non valida	491	0,1
Mancante	8249	1,5
Totale	553379	100,0

Le ultime due domande che vengono qui analizzate appartengono rispettivamente a Dati e Previsioni e a Spazio e Figure. Esse presentano una struttura simile in quanto entrambe sono composte da due item di cui il primo, non appartenente al processo 6, chiede di determinare un numero e il secondo di elaborare una argomentazione relativa allo stesso stimolo. Tuttavia la similarità si ferma qui. In E3b si chiede infatti una argomentazione indipendente da E3a, mentre in E12b si chiede una argomentazione relativa alla risposta data in E12a. La percentuale di risposte corrette in E3b è la più alta di tutti gli item del processo 6 e in più risulta più alta anche della percentuale di risposte corrette in E3a. A questo bisogna aggiungere che la griglia di correzione del quesito E3b indica come accettabili anche argomentazioni di carattere intuitivo, senza necessità di esplicitare calcoli. In E12b le risposte corrette sono invece in percentuale più basse rispetto alle risposte corrette in E12a. Nella griglia di correzione di E12b è specificato che sono accettabili anche argomentazioni sia a carattere intuitivo sia che presentino calcoli a condizione che in tutti i casi si faccia esplicito riferimento alla congruenza tra il segmento CD e il raggio. Proprio questa richiesta di esplicitazione può essere occasione per cominciare a lavorare in classe con gli alunni sul significato di dimostrazione in matematica.

Di seguito sono riportati i testi delle domande e le tabelle con i relativi risultati.

PN2012 – E3b

E3. All'università un esame di inglese prevede uno scritto e un orale e il voto massimo per ciascuna prova è 30. Il voto dello scritto vale il doppio rispetto al voto dell'orale. Piero prende 24 allo scritto e 30 all'orale.

a. Quale sarà il voto finale di Piero nell'esame di inglese?

A. 25
 B. 26
 C. 27
 D. 28

b. Marco prende 30 allo scritto e 24 all'orale. Come sarà il voto finale di Marco rispetto a quello di Piero?
 Scegli una delle tre risposte e completa la frase.

Sarà più alto perché

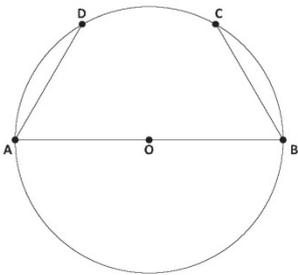
Sarà più basso perché

Sarà uguale perché

Domanda E3b	Frequenza	Percentuale
Errata	134954	24,4
Corretta	344900	62,3
Non valida	3916	0,7
Mancante	69609	12,6
Totale	553379	100,0

PN2012 – E12b

E12. La circonferenza in figura ha il diametro di 10 cm e le corde AD e BC uguali al raggio.



a. Qual è il perimetro del quadrilatero ABCD?

Risposta: cm

b. Giustifica la tua risposta.

.....

.....

.....

Domanda E12b	Frequenza	Percentuale
Errata	166285	30,0
Corretta	232173	42,0
Non valida	3140	0,6
Mancante	151781	27,4
Totale	553379	100,0

BIBLIOGRAFIA

D'Amore B. (1999), Elementi di didattica delle matematica, Pitagora Editrice, Bologna

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 61(1-2), 103-131.

Fandino Pinilla M.I. (2005) – Le frazioni – Pitagora Editrice Bologna