



ISTITUTO NAZIONALE PER LA VALUTAZIONE
DEL SISTEMA EDUCATIVO DI ISTRUZIONE E DI FORMAZIONE

Servizio Nazionale di Valutazione

GUIDA ALLA LETTURA PROVA DI MATEMATICA

Classe seconda – Scuola primaria

Anno scolastico 2025/2026



Principali caratteristiche della Prova del Grado 2

Tab. 1 Distribuzione dei quesiti secondo gli AMBITI

Ambito	Numero di domande	Numero di Item ¹
Numeri	8	8
Spazio e figure	7	7
Dati e previsioni	6	8
Relazioni e funzioni	7	7
TOTALE	28	30

Tab. 2 Distribuzione degli item secondo le DIMENSIONI

Dimensione	Numeri NU	Spazio e figure SF	Dati e previsioni DP	Relazioni e funzioni RF	TOTALE
Conoscere	4	5	1	2	12
Risolvere problemi	3	2	6	3	14
Argomentare	1	0	1	2	4
TOTALE	8	7	8	7	30

Tab. 3 Suddivisione degli item in relazione ad ambiti e traguardi delle Indicazioni nazionali²

TRAGUARDI	AMBITI				TOT
	NU	SF	DP	RF	
TP1. L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice	3	0	0	1	4
TP2. Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo	0	4	0	0	4
TP3. Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo	0	1	0	0	1
TP4. Utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro...)	0	0	1	0	1
TP5. Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici). Ricava informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici	0	0	5	1	6
TP6. Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza	0	0	1	0	1
TP7. Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici	1	0	1	2	4
TP8. Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria	3	2	0	3	8
TP9. Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri	0	0	0	0	0
TP10. Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...)	1	0	0	0	1
TOTALE	8	7	8	7	30

¹ Una domanda può essere composta da più item, come nel caso di domande a scelta multipla complessa del tipo Vero o Falso. L'attribuzione di un eventuale punteggio parziale sarà definita in sede di analisi dei dati complessivi.

² La presente suddivisione e la Guida fanno riferimento alle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione* del 2012, ancora vigenti per la classe seconda. Le nuove *Indicazioni Nazionali per il curricolo* (D.M. 9 dicembre 2025, n. 221) saranno adottate gradualmente per la scuola primaria, solo a partire dall'a.s. 2026/2027. L'adozione per la classe seconda primaria è perciò prevista dall'a.s. 2027/2028.

Tab. 4 Composizione della prova: tabella riassuntiva

DOM.	AMBITO	TRAGUARDO	DIMENSIONE	Scopo della domanda
D1	SF	TP3	Conoscere	Individuare la vista dall'alto di una costruzione 3D
D2a	DP	TP5	Risolvere problemi	Completare un grafico a barre utilizzando i vincoli forniti in un testo
D2b	DP	TP5	Risolvere problemi	Leggere e interpretare dati numerici su un grafico
D3a	DP	TP5	Risolvere problemi	Confrontare informazioni sulla base dei dati rappresentati in un grafico a barre
D3b	DP	TP5	Risolvere problemi	Confrontare informazioni sulla base dei dati rappresentati in un grafico a barre
D4	NU	TP8	Risolvere problemi	Determinare la quantità minima che soddisfa i vincoli assegnati in una data situazione problematica
D5	RF	TP7	Argomentare	Interpretare una rappresentazione sulla base delle informazioni fornite in un testo contenente aspetti logici e matematici
D6	RF	TP1	Conoscere	Individuare il numero il cui doppio è uguale al triplo di un numero dato
D7	NU	TP1	Conoscere	Individuare i due addendi che completano un'addizione di cui sono noti la somma e un terzo addendo
D8	SF	TP2	Conoscere	Individuare le due figure in cui un dato poligono è suddiviso dal segmento che unisce due vertici
D9	SF	TP2	Conoscere	Completare una figura in modo che sia congruente a una figura data
D10	NU	TP1	Conoscere	Individuare il numero di elementi rappresentati in un'immagine
D11	NU	TP10	Conoscere	Individuare il numero che si trova in una data posizione sulla retta dei numeri
D12	NU	TP8	Risolvere problemi	Determinare il valore monetario massimo, sulla base delle informazioni fornite in tre immagini
D13	RF	TP8	Risolvere problemi	Determinare il numero massimo di oggetti che risolve una data situazione problematica
D14	DP	TP6	Risolvere problemi	Determinare se un evento è certo, possibile o impossibile
D15	NU	TP7	Argomentare	Stabilire la verità o falsità di tre affermazioni relative a un numero di oggetti in contesto
D16	SF	TP8	Risolvere problemi	Determinare la figura composta da tre figure geometriche assegnate, senza sovrapporle
D17	SF	TP2	Conoscere	Confrontare tra loro le lunghezze di tre percorsi su una griglia quadrettata, fornita l'unità
D18	RF	TP8	Risolvere problemi	Determinare la relazione tra le capacità di diversi contenitori a partire dalle informazioni fornite mediante testo e immagini
D19	DP	TP4	Conoscere	Individuare l'orario ottenuto da un'ora assegnata, trascorso un dato intervallo di tempo
D20	NU	TP8	Risolvere problemi	Determinare la quantità di oggetti che risolve una situazione problematica espressa in forma verbale

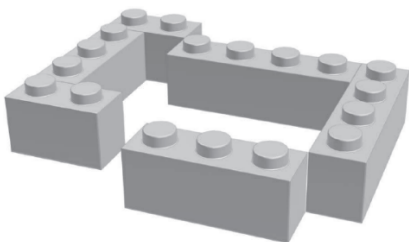
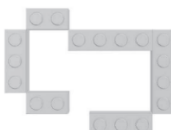
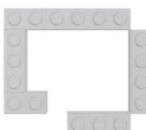
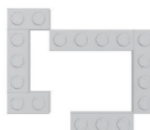
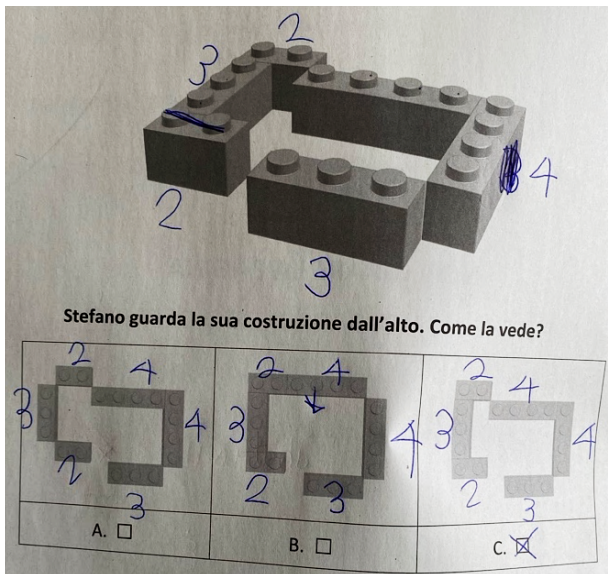
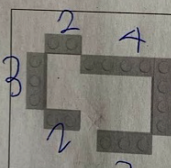
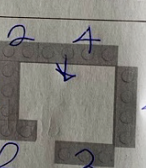
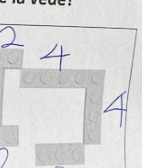
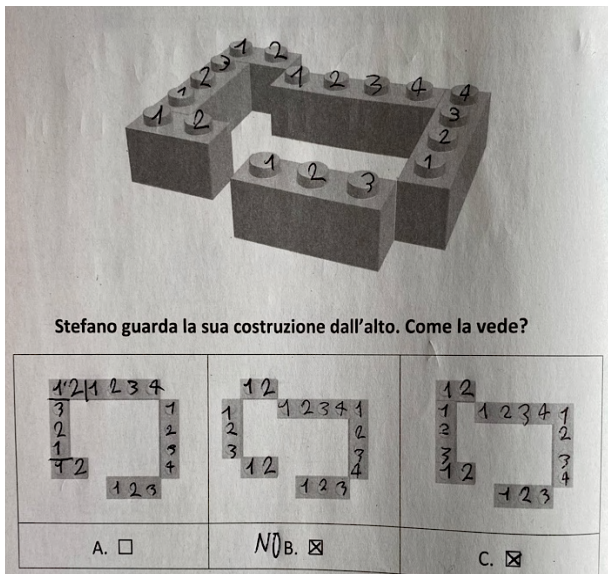
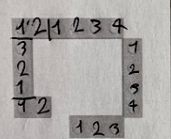
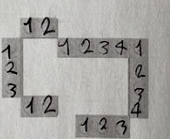
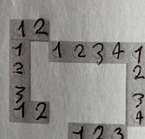
DOM.	AMBITO	TRAGUARDO	DIMENSIONE	Scopo della domanda
D21	RF	TP8	Risolvere problemi	Determinare il costo di un oggetto a partire dai costi complessivi di due insiemi di oggetti
D22	NU	TP1	Conoscere	Individuare la somma di numeri assegnati, utilizzando il valore posizionale delle cifre
D23	DP	TP7	Argomentare	Argomentare su quale tra più eventi ha la maggiore probabilità di verificarsi
D24	RF	TP7	Argomentare	Stabilire la verità o falsità di affermazioni relative a informazioni fornite in una tabella contenente immagini e testo
D25	SF	TP2	Conoscere	Individuare le due figure simmetriche la cui composizione dà una figura data
D26	SF	TP8	Risolvere problemi	Determinare la rappresentazione bidimensionale di un modello tridimensionale a partire da un'immagine del modello
D27	RF	TP5	Conoscere	Individuare l'intervallo numerico che contiene un dato numero in un contesto reale
D28	DP	TP5	Risolvere problemi	Completare una tabella a doppia entrata a partire dalle informazioni espresse in un testo

Sei domande di questa prova sono in continuità con la prova nazionale di matematica della classe quinta primaria (*tra parentesi la domanda corrispondente del grado 5*): D1 (D25), D3 (D11), D9 (D2), D10 (D19), D13 (D21) e D21 (D22).

In questa guida sono state inserite alcune scansioni da protocolli originali che provengono dai fascicoli della prova nazionale (maggio 2026).

Tali scansioni hanno lo scopo di fornire esempi di strategie di ragionamento o di difficoltà e di arricchire i commenti.

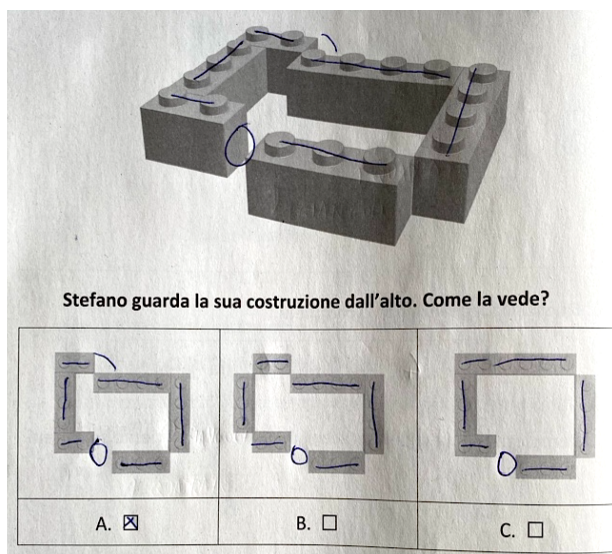
L'ordine delle domande presentate e quello delle opzioni di risposta nei quesiti a scelta multipla sono relativi al Fascicolo 1 (ma i protocolli, ripresi da fascicoli diversi, possono fare riferimento a un diverso ordine per le opzioni).

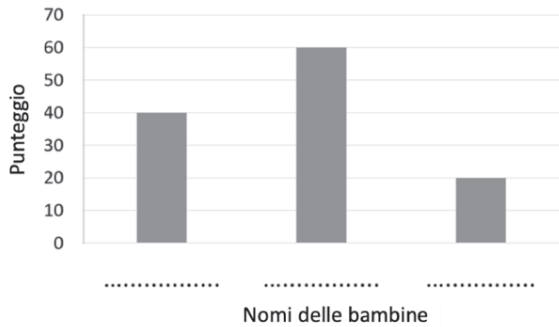
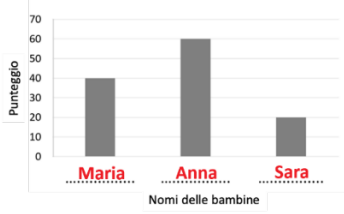
DOMANDA		AMBITO PREVALENTE				
D1. Stefano ha fatto questa costruzione.		SPAZIO E FIGURE DIMENSIONE Conoscere RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ. TRAGUARDO Descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo OBIETTIVO Disegnare figure geometriche e costruire modelli materiali anche nello spazio SCOPO DELLA DOMANDA Individuare la vista dall'alto di una costruzione 3D				
 Stefano guarda la sua costruzione dall'alto. Come la vede?    A. ☐ B. ☐ C. ☐						
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE				
C	Item	Mancante	A	B	C	
	D1	2,4%	10,4%	4,9%	82,2%	
COMMENTI E OSSERVAZIONI						
La domanda presenta l'immagine di una costruzione tridimensionale realizzata con mattoncini di diversa lunghezza e richiede di riconoscere come si vede la costruzione se la si guarda <i>dall'alto</i>, assegnando tre viste dall'alto alternative. Per rispondere alla domanda è possibile mettere in corrispondenza ciascuna delle viste fornite (e le singole parti che le compongono) con la costruzione iniziale (e i suoi mattoncini). Le alternative sono composte dalle stesse parti ma differiscono per la posizione reciproca di parti adiacenti in un punto di raccordo: le opzioni A e B introducono ciascuna un disallineamento non presente nella costruzione originale, che deve essere riconosciuto per scartare l'opzione. I protocolli qui sotto mostrano diverse modalità di gestione dello spazio alla ricerca di corrispondenze tra la costruzione iniziale e le viste dall'alto.						
 Stefano guarda la sua costruzione dall'alto. Come la vede?    A. ☐ B. ☐ C. ☒		 Stefano guarda la sua costruzione dall'alto. Come la vede?    A. ☐ B. ☒ C. ☒				

Nel protocollo a sinistra, la lunghezza dei singoli mattoncini nella costruzione è messa in relazione con la lunghezza delle parti corrispondenti nelle viste dall'alto (attraverso il numero di bottoncini su ciascun mattoncino scritto accanto). Nella vista centrale inoltre una freccia sembra invitare a muovere il mattoncino di lunghezza 4 verso il basso per ritrovare proprio la vista dall'alto della costruzione; infatti, la scelta ricade sulla terza opzione.

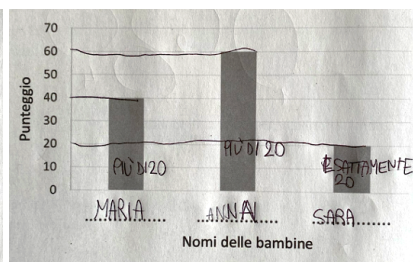
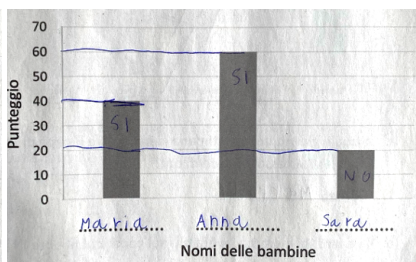
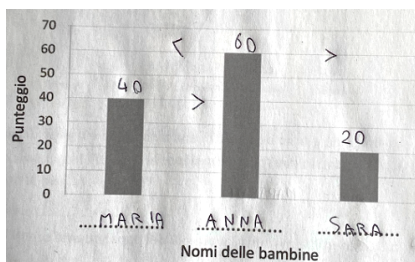
Nel protocollo a destra, per ogni mattoncino nella costruzione i bottoncini sono enumerati singolarmente e lo stesso accade nelle tre viste, in modo da poter ricercare la giusta posizione dei bottoncini nello spazio e la conseguente reciproca posizione delle parti nella vista dall'alto.

Una strategia alternativa, comunque simile, visibile nel protocollo che segue, consiste nell'associare ai mattoncini della costruzione e alle parti delle viste dall'alto specifici tratti rettilinei che rendono visibili le variazioni di lunghezza, così da ritrovare le relazioni tra un mattoncino e l'altro della costruzione nella vista cercata (peculiari il segno ad arco che indica l'angolo formato in alto tra due mattoncini e un cerchio per catturare la presenza di uno spazio vuoto).

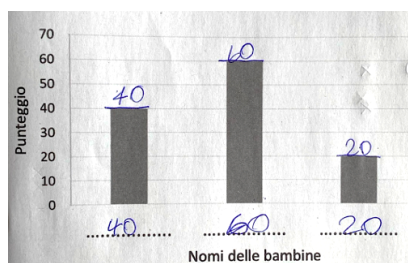


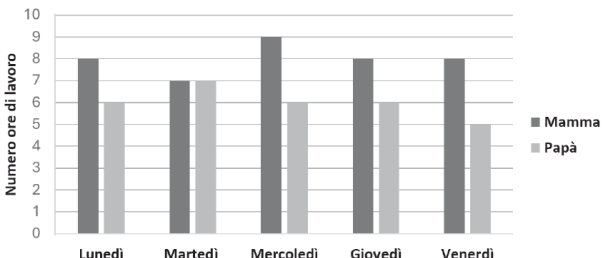
DOMANDA		AMBITO PREVALENTE				
D2. Il grafico riporta i punteggi ottenuti da tre bambine in una gara. Ogni colonna corrisponde al punteggio di una bambina, ma manca il nome della bambina. a. Scrivi i nomi delle tre bambine al posto dei puntini tenendo conto delle seguenti informazioni: • Anna ha ottenuto il punteggio più alto • Sara ha ottenuto meno punti di Maria  b. Quante bambine hanno ottenuto un punteggio maggiore di 20? A. ☐ Una sola bambina B. ☐ Due bambine C. ☐ Tutte e tre le bambine		DATI E PREVISIONI				
		DIMENSIONE				
		Risolvere problemi				
		RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.				
		TRAGUARDO Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici). Ricava informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici OBIETTIVO <i>Leggere e rappresentare relazioni e dati con diagrammi, schemi e tabelle</i>				
		SCOPO DELLA DOMANDA				
		a. Completare un grafico a barre utilizzando i vincoli forniti in un testo b. Leggere e interpretare dati numerici su un grafico				
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE				
a. 		Item	Mancante	Errata	Corretta	
		D2a	7,8%	17,4%	74,8%	
b. B		Item	Mancante	A	B	C
		D2b	4,4%	23,8%	63,5%	8,3%
COMMENTI E OSSERVAZIONI						
La domanda presenta una situazione problematica che coinvolge un grafico a barre sul quale sono riportati <i>i punteggi ottenuti da tre bambine in una gara</i>. Il grafico però non è completo: mancano i nomi delle bambine in corrispondenza delle barre. L’item (a) richiede di completare il grafico a partire dalle due informazioni testuali fornite nello stimolo: <i>Anna ha ottenuto il punteggio più alto</i> e <i>Sara ha ottenuto meno punti di Maria</i>. Dalle quantità già visibili dalle altezze delle barre è possibile discernere quale nome associare a quale barra: il primo vincolo infatti isola la barra tra tutte più alta (60, Anna), mentre il secondo permette di ragionare per esclusione sulle barre restanti, confrontando tra loro i punteggi corrispondenti: 20 (Sara) e 40 (Maria). L’item (b) richiede una lettura diretta del grafico dalla quale ricavare quante bambine hanno ottenuto <i>punteggio maggiore di 20</i>. Se una delle tre barre corrisponde proprio al punteggio 20, le altre due lo superano entrambe, perciò la risposta è <i>Due bambine</i>. I protocolli che seguono rivelano varie modalità di controllo sull’interpretazione delle informazioni fornite dal testo. Nel protocollo a sinistra, i segni “>” e “<” scritti vicino alle barre esprimono tutti i confronti necessari per risolvere la situazione (40<60 e 60>20, per dirimere dove inserire “ANNA”; 40>20, per dirimere dove inserire “MARIA” e “SARA”). Negli esempi al centro e a destra, le linee tracciate in orizzontale a connettere le altezze delle barre ai valori sull’asse verticale consentono di risalire ai nomi da						

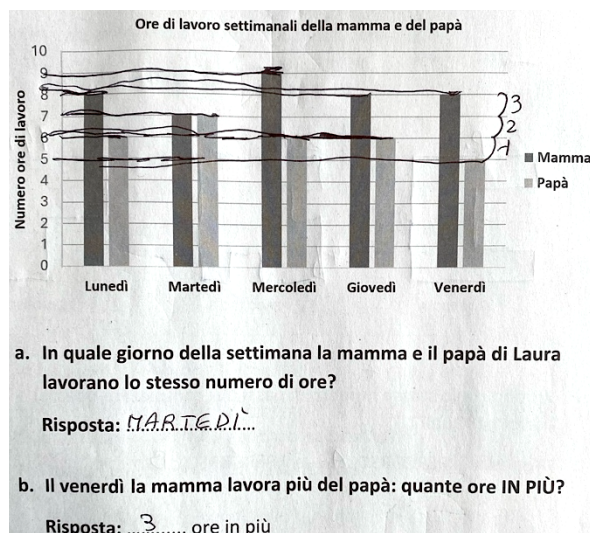
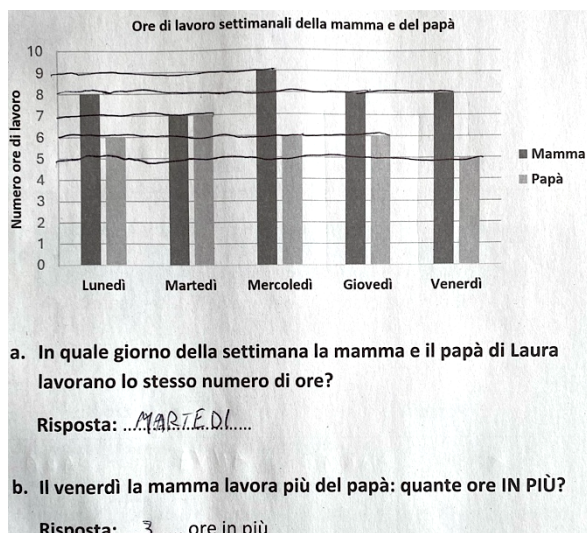
scrivere in corrispondenza di ciascuna barra. Dentro le tre barre, troviamo inoltre (da sinistra a destra) “SÌ”, “SÌ”, “NO” per tenere traccia delle bambine il cui punteggio supera 20 (“Maria” e “Anna”), oppure, in modo analogo, le espressioni “PIÙ DI 20”, “PIÙ DI 20”, “ESATTAMENTE 20”.



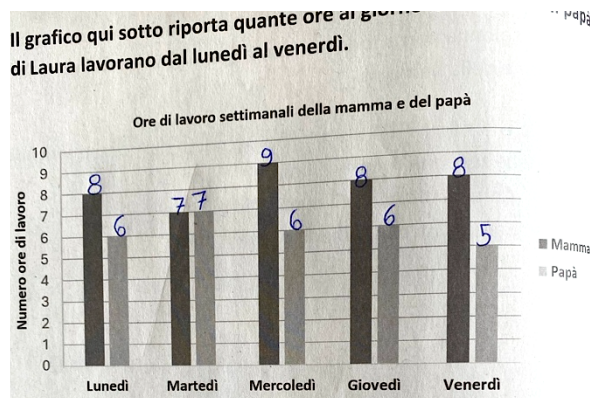
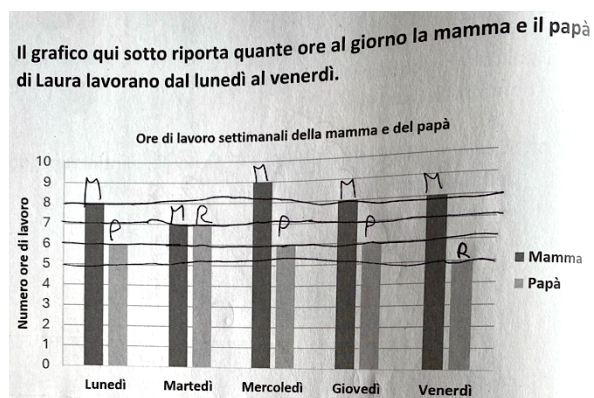
Il protocollo sotto mostra un esempio di difficoltà di gestione delle variabili da inserire come etichette per le barre del grafico, con la ripetizione dei valori dei punteggi già correttamente individuati per le barre e dichiarati sulle tre estremità.



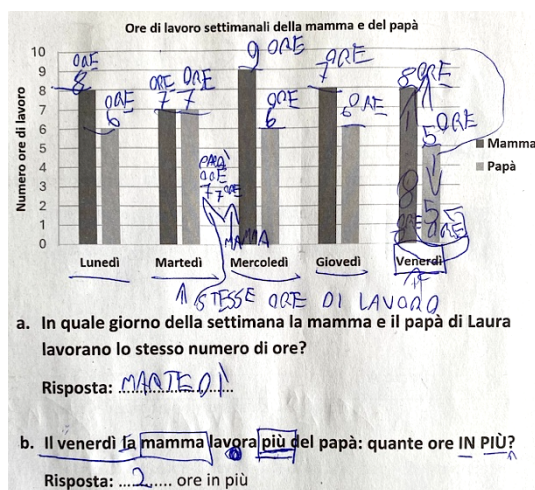
DOMANDA		AMBITO PREVALENTE			
D3. Il grafico qui sotto riporta quante ore al giorno la mamma e il papà di Laura lavorano dal lunedì al venerdì. Ore di lavoro settimanali della mamma e del papà  Numero ore di lavoro ■ Mamma ■ Papà Lunedì Martedì Mercoledì Giovedì Venerdì a. In quale giorno della settimana la mamma e il papà di Laura lavorano lo stesso numero di ore? Risposta: b. Il venerdì la mamma lavora più del papà: quante ore IN PIÙ? Risposta: ore in più		DATI E PREVISIONI			
		DIMENSIONE			
		Risolvere problemi			
		RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.			
		TRAGUARDO Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici). Ricava informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici OBIETTIVO <i>Leggere e rappresentare relazioni e dati con diagrammi, schemi e tabelle</i>			
		SCOPO DELLA DOMANDA			
		Confrontare informazioni sulla base dei dati rappresentati in un grafico a barre			
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE			
		Item	Mancante	Errata	Corretta
a. Martedì		D3a	3,3%	19,2%	77,5%
b. 3		D3b	4,0%	37,8%	58,2%
COMMENTI E OSSERVAZIONI					
La domanda presenta un grafico a barre che mostra il numero di ore di lavoro settimanali dei genitori di una bambina, <i>Laura</i>, differenziando per colore le rispettive barre come indicato in una legenda. L'item (a) si focalizza sul giorno della settimana nel quale il numero di ore di lavoro della mamma è <i>lo stesso</i> del numero di ore di lavoro del papà, informazione che è possibile discernere direttamente dal grafico cercando quando le due barre mostrano la stessa altezza. L'item (b) si focalizza sul confronto tra le ore di lavoro della mamma e quelle del papà nella giornata di venerdì, chiedendo <i>quante ore IN PIÙ</i> fa la mamma. Per rispondere efficacemente è sufficiente focalizzare l'attenzione sulla differenza tra le due barre, contando gli spazi che intercorrono tra l'una e l'altra. Poiché la metrica dell'asse verticale è unitaria il numero di spazi conteggiati corrisponde proprio al numero di ore cercato. I primi due protocolli sotto mostrano analoghe modalità di controllo delle informazioni riportate nel grafico, che permettono di fornire le risposte attese ai due quesiti (ovvero, "<i>MARTEDÌ</i>" e "<i>3 ore in più</i>"). In entrambi i casi sono tracciate linee (diciamo, orizzontali) che permettono di connettere la sommità di ciascuna barra con il corrispondente numero di ore indicato sull'asse verticale e nel contempo di confrontare le altezze delle barre. Nel protocollo a sinistra, ad esempio, l'unica linea che unisce due barre consecutive relative l'una al numero di ore di lavoro del papà e l'altra al numero di ore di lavoro della mamma rivela che martedì è il giorno della settimana in cui i due genitori lavorano lo stesso numero di ore. Nel caso del protocollo di destra, appaiono i numeri "<i>1</i>", "<i>2</i>", "<i>3</i>" associati al conteggio degli spazi (indicati con tre archi) che differenziano in altezza, nella giornata di venerdì, la barra relativa al papà (in grigio chiaro) da quella relativa alla mamma (in grigio scuro).					



Un terzo protocollo (qui sotto, a sinistra) mostra l'aggiunta delle etichette "M" e "P" sopra a ciascuna coppia di barre per distinguere per ogni giorno la barra relativa alla mamma e quella relativa al papà. Diversamente, altri inseriscono sopra ciascuna barra il numero di ore di lavoro corrispondenti così da tenerne traccia immediatamente nel confrontare le ore della mamma e del papà (protocollo a destra).



Anche il protocollo seguente mostra la traccia delle ore di giorno in giorno e alcune frecce che indirizzano l'esplorazione da un lato sulle "STESSE ORE DI LAVORO" del martedì e dall'altro sul confronto delle ore lavorate dalla mamma il venerdì con quelle lavorate dal papà. Il protocollo evidenzia la tipica difficoltà legata alla distinzione tra numero di spazi e numero di valori intermedi (6 e 7, in questo caso) nel passaggio da "5 ORE" a "8 ORE", che si traduce nella risposta "2" ore in più.

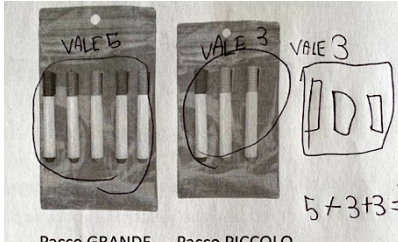


DOMANDA	AMBITO PREVALENTE
D4. In un negozio ci sono pacchi di pennarelli come questi.  Pacco GRANDE Pacco PICCOLO Alex vuole avere esattamente 11 pennarelli. Compra un pacco GRANDE e dei pacchi PICCOLI. Quanti pacchi PICCOLI ha comprato per avere esattamente 11 pennarelli? Risposta:	NUMERI
	DIMENSIONE
	Risolvere problemi
	RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.
	TRAGUARDO Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria OBIETTIVO Eseguire mentalmente semplici operazioni con i numeri naturali e verbalizzare le procedure di calcolo
	SCOPO DELLA DOMANDA
	Determinare la quantità minima che soddisfa i vincoli assegnati in una data situazione problematica

RISPOSTA CORRETTA	RISULTATI CAMPIONE			
2	Item	Mancante	Errata	Corretta
	D4	4,8%	45,3%	49,9%
COMMENTI E OSSERVAZIONI				

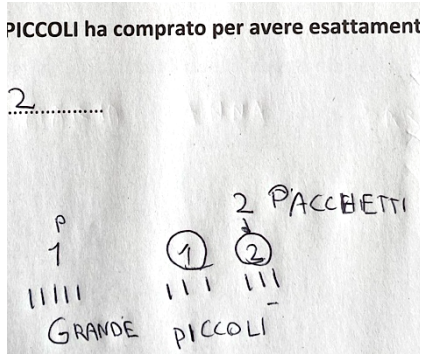
La domanda presenta una situazione problematica che richiede di ricavare il numero di *pacchi PICCOLI* di pennarelli che Alex ha comprato in negozio insieme a *un pacco GRANDE* volendo acquistare *esattamente 11 pennarelli*, avendo a disposizione le immagini dei due tipi di pacchi (il grande con 5 pennarelli, il piccolo con 3 pennarelli).

Per rispondere alla domanda è possibile riconoscere 6 come 3×2 nella tabellina del 3, sfruttando il fatto che la differenza tra 11 e 5 è 6, oppure partire da 5 e sommarvi 3 il numero di volte necessario a raggiungere 11. I protocolli sotto presentano strategie di ragionamento efficaci nella seconda direzione.



Pacco GRANDE Pacco PICCOLO

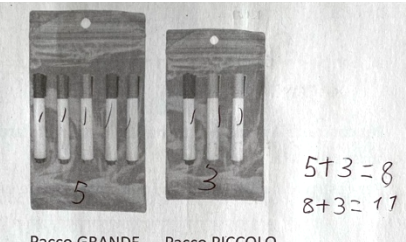
avere esattamente 11 pennarelli.
 pacco GRANDE e dei pacchi PICCOLI.
 chi PICCOLI ha comprato per avere esattamente 11
 2 PACCHETTI PICCOLI



PICCOLI ha comprato per avere esattamente

2 PACCHETTI

1 GRANDE 2 PICCOLI

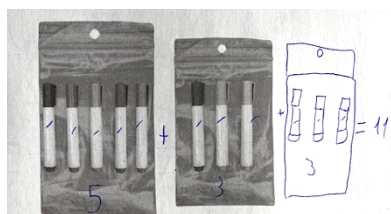


Pacco GRANDE Pacco PICCOLO

avere esattamente 11 pennarelli.
 pacco GRANDE e dei pacchi PICCOLI.
 chi PICCOLI ha comprato per avere esattamente 11
 2 PACCHETTI

Nel protocollo a sinistra, vediamo l'attribuzione di un valore a ciascun pacco di pennarelli in relazione al numero di pennarelli che contiene (grande: "VALE 5" e piccolo: "VALE 3"). Accanto alle immagini date c'è il disegno di un nuovo pacco piccolo che "VALE 3", con l'operazione " $5 + 3 + 3 =$ " che serve come controllo. Al centro, i segni aggiunti sul foglio individuano tutti i pacchetti comprati da Alex e il loro contenuto: 1 pacchetto "GRANDE" con 5 pennarelli (le 5 stanghette, e "P" e "1" a indicare 'pacchetto 1') e altri "2 PACCHETTI", questa volta "PICCOLI", con 3 pennarelli (le 3 stanghette), conteggiati con "1" e "2". Il

protocollo a destra mostra un segno su ciascun pennarello visibile, utile al conteggio espresso con l'operazione $"5+3=8"$, incolonnata con $"8+3=11"$ in modo che i due 3 siano uno sotto l'altro. Ulteriori strategie simili alle precedenti, basate sul completamento del numero di pennarelli a 11, sono visibili nei protocolli seguenti. In particolare, nell'esempio più a destra, sono dapprima uniti due pacchi di tre pennarelli (si vedano la linea che unisce i due insiemi di tre pennarelli, ognuno indicato con "1 2 3" e l'operazione $"3+3=6"$), poi al totale dei 6 pennarelli è aggiunto il numero di pennarelli del pacco grande ($"6+5=11"$).



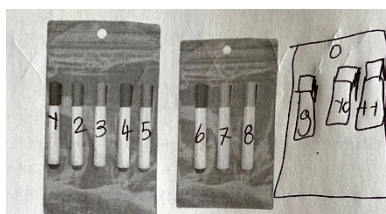
Pacco GRANDE Pacco PICCOLO

avere esattamente 11 pennarelli.

pacco GRANDE e dei pacchi PICCOLI.

chi PICCOLI ha comprato per avere esattamente 11

2 PACCHETTI



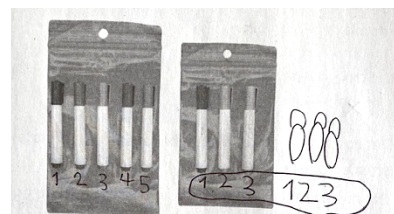
Pacco GRANDE Pacco PICCOLO

avere esattamente 11 pennarelli.

pacco GRANDE e dei pacchi PICCOLI.

chi PICCOLI ha comprato per avere esattamente 11

2



Pacco GRANDE Pacco PICCOLO

avere esattamente 11 pennarelli.

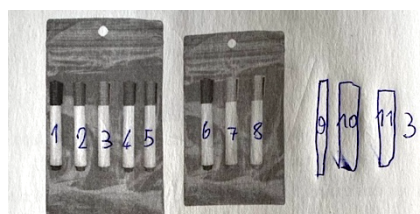
pacco GRANDE e dei pacchi PICCOLI.

chi PICCOLI ha comprato per avere esattamente 11

2

Difficoltà tipiche si legano alla gestione delle variabili in gioco: oltre al numero di pacchi di pennarelli, sia grandi sia piccoli, è coinvolto il numero di pennarelli per ciascun tipo di pacco.

Il protocollo che segue mostra traccia di tali difficoltà. La strategia sembra efficace: sono enumerati in sequenza gli 8 pennarelli già presenti nelle immagini e, a fianco, è aggiunto il disegno di altri tre pennarelli (un altro pacco piccolo), enumerati da "9" a "11". Per la risposta non si considerano però i due pacchi piccoli ma si prende proprio il numero di pennarelli aggiunti, come appare verosimile dal numero "3" scritto a destra del disegno (e la risposta fornita è "3").



Pacco GRANDE Pacco PICCOLO

avere esattamente 11 pennarelli.

pacco GRANDE e dei pacchi PICCOLI.

chi PICCOLI ha comprato per avere esattamente 11

3

DOMANDA		AMBITO PREVALENTE				
D5. Cinque bambini sono in fila.  Uno dei bambini si chiama Federico. Federico dice: “Non sono l’ultimo della fila. Ci sono più bambini davanti a me che dietro di me” Quanti bambini ci sono davanti a Federico? A. ☐ 2 B. ☐ 3 C. ☐ 4		RELAZIONI E FUNZIONI				
		DIMENSIONE				
		Argomentare				
		RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.				
		TRAGUARDO				
		Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici				
		OBIETTIVO				
		Comunicare la posizione di oggetti nello spazio fisico, sia rispetto al soggetto, sia rispetto ad altre persone o oggetti, usando termini adeguati (sopra/sotto, davanti/dietro, destra/sinistra, dentro/fuori)				
		SCOPO DELLA DOMANDA				
		Interpretare una rappresentazione sulla base delle informazioni fornite in un testo contenente aspetti logici e matematici				
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE				
B	Item	Mancante	A	B	C	
	D5	3,1%	16,7%	51,9%	28,3%	
COMMENTI E OSSERVAZIONI						
La domanda richiede di tenere in considerazione le due relazioni, espresse in un testo, tra la posizione di un bambino, <i>Federico</i>, e quella di altri quattro bambini, in riferimento alla rappresentazione di <i>cinque bambini in fila</i>, per associare a Federico la sua posizione nella fila e trovare il numero di bambini che lo precedono. È inoltre presente un disegno che mostra cinque bambini in fila. L’opzione di risposta A si riferisce a una delle due possibili negazioni della relazione <i>Ci sono più bambini davanti a me che dietro di me</i>, vale a dire quella che considera lo stesso numero di bambini davanti e dietro a Federico (2). L’opzione di risposta C (4) invece si focalizza sulla possibilità di includere Federico nel conteggio una volta riconosciuto che è il quarto della fila, oppure sul non considerare che Federico <i>non</i> è l’ultimo della fila, valutandolo in quinta posizione (si tratta di un’opzione che ha poco meno di un terzo delle percentuali di risposta). Strategie di ragionamento efficaci per scegliere l’opzione di risposta attesa (3), consistono nel procedere per esclusione sulla base delle due relazioni fornite nel testo. La prima relazione permette di escludere subito che Federico possa trovarsi in ultima posizione, la seconda che Federico possa trovarsi in prima, seconda o terza posizione. Una volta collocato Federico nella fila, basta conteggiare i bambini che ha davanti, come mostra il protocollo seguente, dove tre linee verticali sono tracciate sopra i tre bambini davanti.						
						

Nel protocollo sotto, a sinistra, la relazione di maggiore tra il numero dei bambini davanti e il numero dei bambini dietro è esplicitata mediante il segno ">" e il conteggio espresso dalle scritte aggiunte a ciascun membro della fila: "1B", "2B", "3B" (verosimilmente per indicare 1 bambino, 2 bambini, 3 bambini). Nel protocollo a destra, tutti gli altri bambini della fila sono conteggiati a partire dal primo, in ordine decrescente, con i numeri da "4" a "1" e la posizione di Federico è indicata con una freccia ("LUI È FEDERICO").



DOMANDA	AMBITO PREVALENTE				
D6. Il TRIPLO di 4 è uguale al DOPPIO di ... A. ☐ 6 B. ☐ 7 C. ☐ 8	RELAZIONI E FUNZIONI				
	DIMENSIONE				
	Conoscere				
	RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.				
	TRAGUARDO L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice OBIETTIVO Conoscere con sicurezza le tabelline della moltiplicazione dei numeri fino a 10. Eseguire le operazioni con i numeri naturali con gli algoritmi scritti usuali				
	SCOPO DELLA DOMANDA				
	Individuare il numero il cui doppio è uguale al triplo di un numero dato				
RISPOSTA CORRETTA	RISULTATI CAMPIONE				
A	Item	Mancante	A	B	C
	D6	5,4%	42,8%	9,5%	42,3%

COMMENTI E OSSERVAZIONI

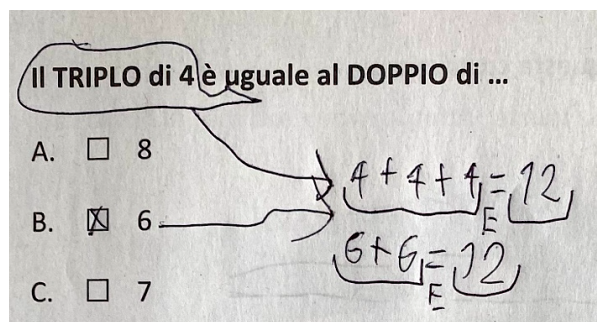
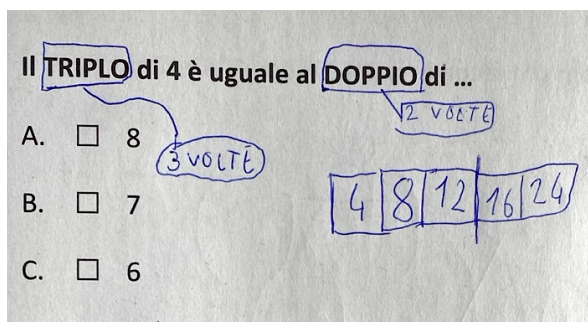
La domanda richiede di individuare il numero che soddisfa la relazione assegnata nel testo, ovvero: il cui doppio sia *uguale* al *TRIPLO* di 4.

Si tratta di un compito di completamento in cui questo vincolo specifico attiva processi algebrici precoci: si cerca infatti quel numero (sconosciuto) che raddoppiato uguaglia 3×4 . Per rispondere 6, è possibile trovare la metà di 12 ($= 3 \times 4$) oppure procedere con ciascuna opzione di risposta, raddoppiarla e verificare quale dà risultato uguale a 3×4 .

Le altre due opzioni di risposta: 7 (B) e 8 (C) richiamano rispettivamente: la somma $3+4$ (che può essere veicolata dalla sola espressione *TRIPLO* di 4 interpretata come 3 e 4 unità) e il doppio di 4 (che può derivare dall'associazione della parola *DOPPIO* con il numero 4).

Possibili strategie risolutive si basano sulla comprensione del testo e sulla ricerca del triplo e possono essere favorite dalle opzioni di risposta fornite che permettono un controllo sul processo risolutivo.

I seguenti protocolli esemplificano strategie di questo tipo.

Nel protocollo a sinistra, le frecce indicano l'una la traduzione del triplo di 4 nel linguaggio aritmetico con l'addizione " $4+4+4$ ", l'altra il controllo sul fatto che per l'opzione di risposta scelta deve essere preso il doppio: " $6+6$ " (il riferimento è inoltre rimarcato dalle sottolineature delle due addizioni). Entrambe le scritture sono completate con " $= 12$ " e una "E" che verosimilmente sottintende che 'il risultato è sempre 12. Nel protocollo a destra il *TRIPLO* e il *DOPPIO* sono associati rispettivamente a "3 VOLTE" e "2 VOLTE"

e cinque numeri della tabellina del 4 ("4", "8", "12", "16", "24") sono scritti in sequenza con una linea verticale che divide 12 dai successivi due numeri. Apparentemente l'approccio sembra produttivo ma non è alla fine indicata alcuna risposta come se la linea di demarcazione tra 12 e 16 lasciasse il dubbio sulla scelta di 6 o di 8 (metà di 12 o di 16).

DOMANDA		AMBITO PREVALENTE			
D7. Questa uguaglianza non è completa. + 9 + = 19 Completa tu l'uguaglianza: scegli due di questi numeri e scrivi sui puntini. 4769		NUMERI			
		DIMENSIONE			
		Conoscere			
		RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.			
		TRAGUARDO L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice OBIETTIVO Eseguire mentalmente semplici operazioni con i numeri naturali e verbalizzare le procedure di calcolo			
		SCOPO DELLA DOMANDA			
		Individuare i due addendi che completano un'addizione di cui sono noti la somma e un terzo addendo			
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE			
4 + 9 + 6 = 19 oppure 6 + 9 + 4 = 19		Item	Mancante	Errata	Corretta
		D7	6,3%	33,6%	60,1%
COMMENTI E OSSERVAZIONI					
La domanda presenta una uguaglianza e richiede di individuare, tra quattro numeri, i due addendi mancanti di un'addizione a tre addendi, noti il terzo addendo (9) e la somma (19). Una possibile strategia risolutiva si basa prima sulla ricerca della differenza (10) tra la somma e l'addendo conosciuto, poi sull'elaborazione di 10 a sua volta come somma di due numeri da ricercare tra i quattro dati (va notato che solo due di questi numeri sommati danno 10, tutte le altre possibili coppie forniscono come somma un numero maggiore di 10). Il protocollo sotto a sinistra mostra un approccio di questo tipo, avendo escluso 4 e 7 come gli addendi mancanti ("NO" a escludere l'addizione "4 + 9 + 7" e a seguire "4 + 6 = 10" e "10 + 9 = 19"). È anche possibile procedere per tentativi, lavorando per somme parziali e attuando un controllo sui possibili numeri da scegliere. Il protocollo sotto a destra esemplifica questo modo di procedere.					
... + 9 + ... = 19 Completa tu l'uguaglianza: scegli due di questi numeri e scrivi sui puntini. 4 + 9 + 7 = 19 4 + 6 = 10 10 + 9 = 19		... + 9 + ... = 19 Completa tu l'uguaglianza: scegli due di questi numeri e scrivi sui puntini. 6 + 9 + 4 = 19 6 + 9 = 15 15 + 4 = 19			
Il protocollo che segue evidenzia una tipica difficoltà legata a un'interpretazione incompleta del testo, tralasciando la richiesta di scelta dei due numeri tra quelli proposti: i due numeri inseriti, "10" e "0", pur corretti per completare l'uguaglianza, non sono tra quelli forniti.					

ta uguaglianza non è completa.

$$..10.. + 9 + ..0.. = 19$$

Completa tu l'uguaglianza: scegli due di questi numeri e scrivi.

4

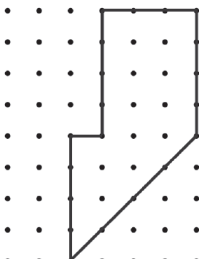
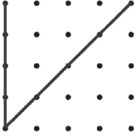
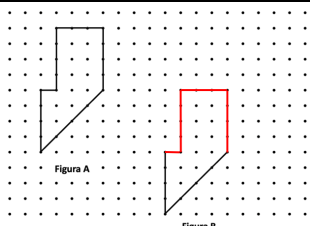
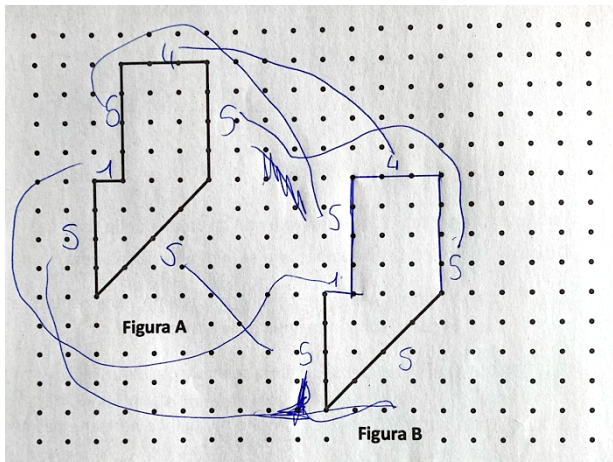
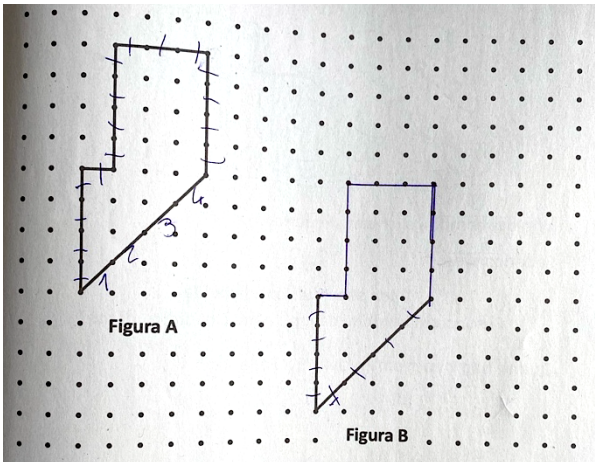
7

6

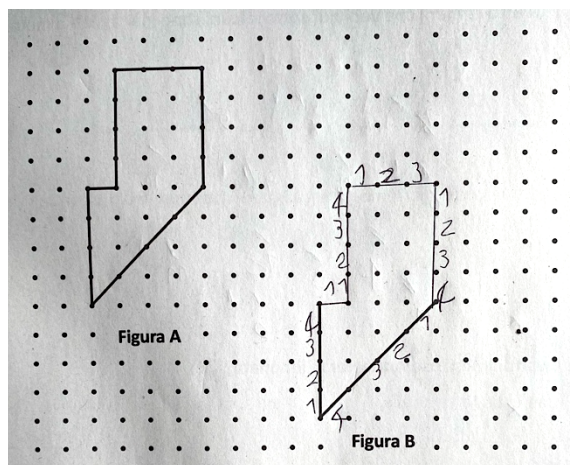
9

[illegible]

Nel secondo caso, è possibile che il segmento e le figure ottenute siano stati solo immaginati oppure che la strategia di pensiero attuata si sia focalizzata sul conteggio dei vertici da un lato (tre: A, B e C) e dall'altro (quattro: C, D, E, A) e quindi sul discernere la diversa lunghezza, ad esempio, dei lati CD e DE, a garanzia del fatto che il quadrilatero non può che essere un rettangolo.

DOMANDA		AMBITO PREVALENTE			
D9. Completa la Figura B in modo che sia uguale alla Figura A.  Figura A  Figura B		SPAZIO E FIGURE			
		DIMENSIONE			
		Conoscere			
		RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.			
		TRAGUARDO Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo OBIETTIVO <i>Disegnare figure geometriche e costruire modelli materiali anche nello spazio</i>			
		SCOPO DELLA DOMANDA			
		Completare una figura in modo che sia congruente a una figura data			
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE			
 Figura A Figura B		Item	Mancante	Errata	Corretta
		D9	5,3%	19,7%	75,0%
COMMENTI E OSSERVAZIONI					
La domanda richiede di completare, su una griglia puntinata, una figura di cui due lati sono dati, in modo che la figura sia congruente alla <i>Figura A</i>, completa e disegnata sulla griglia. La griglia fornisce un sistema di riferimento utile alla riproduzione dei lati mancanti della <i>Figura B</i>. Strategie di ragionamento efficaci per completare opportunamente la seconda figura si appoggiano alla ricerca di corrispondenze tra le due figure nello spazio della griglia e necessitano di opportune modalità di controllo di tali corrispondenze. I protocolli che seguono esemplificano strategie di questo tipo: lati corrispondenti nelle due figure sono messi in relazione mediante linee di collegamento e l'esplicitazione del numero di punti della griglia lungo ogni lato (protocollo a sinistra), oppure mediante segni di conteggio sui lati o numeri lungo di essi a identificare le parti (tra due punti successivi) che compongono ogni lato (protocollo a destra).					
 Figura A Figura B		 Figura A Figura B			

Il protocollo qui sotto mostra ancora un conteggio delle parti per ciascun segmento, questa volta operato solo lungo i lati della figura da completare, come ad attuare una modalità di controllo sul conteggio.

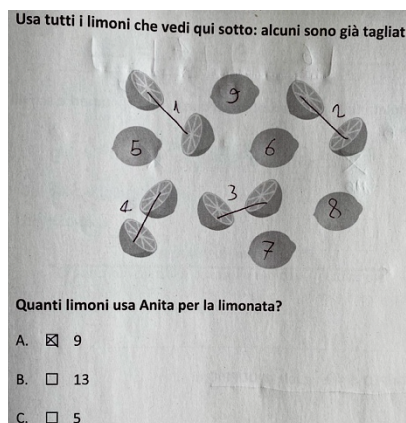
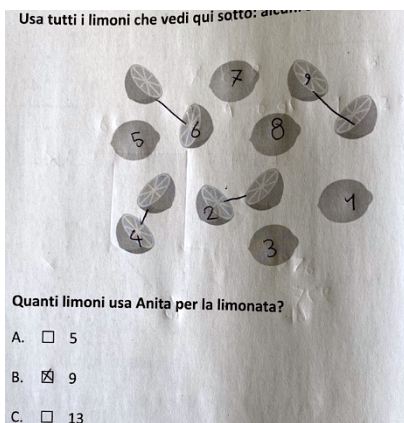
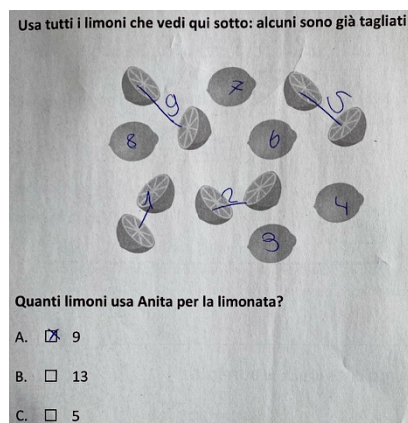


DOMANDA		AMBITO PREVALENTE				
D10. Anita vuole preparare una limonata. Usa tutti i limoni che vedi qui sotto: alcuni sono già tagliati a metà.  Quanti limoni usa Anita per la limonata? A. ☐ 13 B. ☐ 9 C. ☐ 5		NUMERI				
		DIMENSIONE				
		Conoscere				
		RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.				
		TRAGUARDO L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice OBIETTIVO <i>Contare oggetti o eventi, a voce e mentalmente, in senso progressivo e regressivo e per salti di due, tre, ...</i>				
		SCOPO DELLA DOMANDA				
		Individuare il numero di elementi rappresentati in un'immagine				
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE				
B	Item	Mancante	A	B	C	
	D10	2,2%	43,0%	38,5%	16,3%	

COMMENTI E OSSERVAZIONI

La domanda richiede di individuare la quantità di (*tutti i*) limoni utilizzati per *preparare una limonata* e mostrati nell'immagine, *alcuni già tagliati a metà* (come dichiarato nel testo) e altri interi. Per rispondere alla domanda è necessario effettuare un conteggio, avendo l'accortezza di accoppiare ogni due metà in un limone e mantenendo il controllo sul numero di limoni interi che si hanno alla fine (9). Le due opzioni di risposta A (13) e C (5) considerano rispettivamente il numero di tutti i pezzi presenti nell'immagine e il numero dei soli limoni interi.

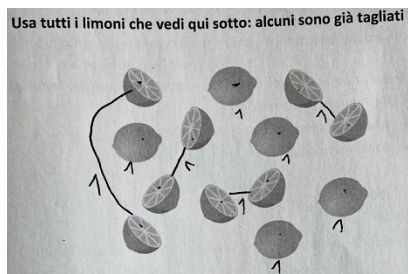
Strategie di conteggio, rilevate dai protocolli, si basano sull'enumerazione di ogni limone intero individuato nell'immagine, avendo unito tra loro due metà così da non perdere il controllo. Nei protocolli sotto, la sola differenza risiede nel fatto che, se da un lato l'ordine di conteggio sfrutta la disposizione dei limoni procedendo per limoni interi vicini (a sinistra e al centro), dall'altro lato, il conteggio considera prima tutte le coppie di mezzi limoni e poi i limoni interi (a destra).



I protocolli che seguono mostrano casi in cui l'approccio al conteggio è leggermente differente. A sinistra, ad esempio, la strategia passa attraverso l'associazione di un peso "1" (a sottintendere un'unità) a ciascun limone individuato nell'immagine (intero o formato da due metà). Al centro, vediamo

dei segni di spunta sui limoni interi e segni analoghi a unire due metà, mentre a destra, ogni limone intero da contare è sempre circoscritto da una linea chiusa.

Usa tutti i limoni che vedi qui sotto: alcuni sono già tagliati



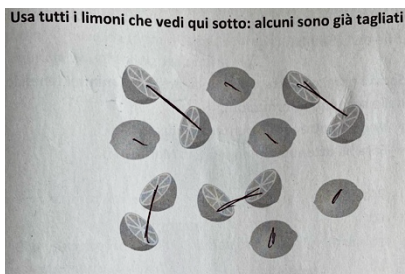
Quanti limoni usa Anita per la limonata?

A. ☒ 9

B. ☐ 5

C. ☐ 13

Usa tutti i limoni che vedi qui sotto: alcuni sono già tagliati



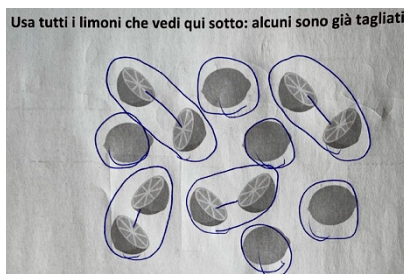
Quanti limoni usa Anita per la limonata?

A. ☒ 9

B. ☐ 5

C. ☐ 13

Usa tutti i limoni che vedi qui sotto: alcuni sono già tagliati



Quanti limoni usa Anita per la limonata?

A. ☐ 5

B. ☒ 9

C. ☐ 13

Una difficoltà comune è quella di confondere i mezzi limoni e i limoni interi, veicolata probabilmente da una lettura del testo incompleta o sommaria, che finisce per focalizzarsi solo su: *Usa tutti i limoni che vedi qui sotto*. Ne consegue la scelta della risposta 13, che conteggia tutti i pezzi presenti nell'immagine. I protocolli seguenti esemplificano questa difficoltà diffusa (sottolineata anche dall'alta percentuale di scelta: 43%).

A sinistra, la scritta "TUTTI" cerchiata a lato dell'immagine, anch'essa cerchiata, e la scritta "TUTTI I LIMONI", aggiunta a fianco dell'opzione di risposta 13, danno forza alla scelta. Al centro sono indicate le metà in tutti i limoni interi ed è enumerato ogni pezzo dell'immagine, così come nel protocollo a destra, nonostante qui siano state contate tutte le metà presenti (che sono 18), conteggio che avrebbe potuto costituire una diversa strategia di risoluzione: contati tutti i mezzi limoni, i limoni interi sono esattamente la metà.

Usa tutti i limoni che vedi qui sotto: alcuni sono già tagliati



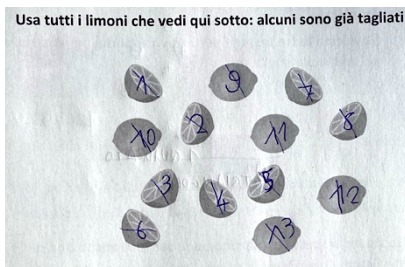
Quanti limoni usa Anita per la limonata?

A. ☐ 5

B. ☒ 13 TUTTI I LIMONI

C. ☐ 9

Usa tutti i limoni che vedi qui sotto: alcuni sono già tagliati



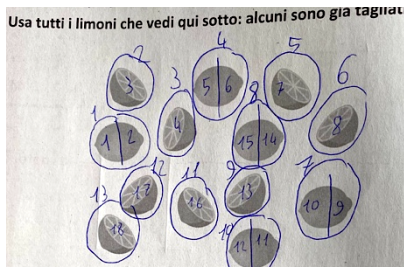
Quanti limoni usa Anita per la limonata?

A. ☐ 5

B. ☒ 13

C. ☐ 9

Usa tutti i limoni che vedi qui sotto: alcuni sono già tagliati

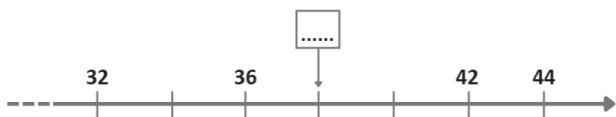
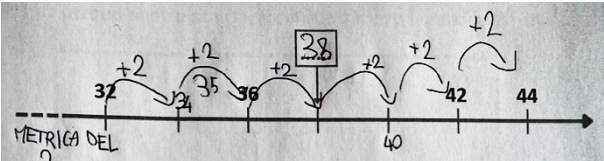
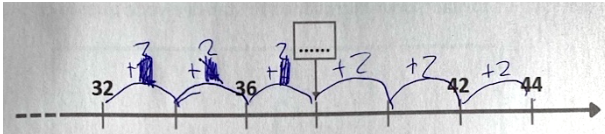


Quanti limoni usa Anita per la limonata?

☐ 5

☐ 9

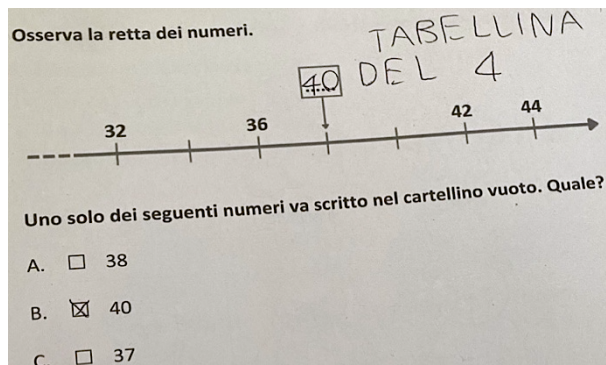
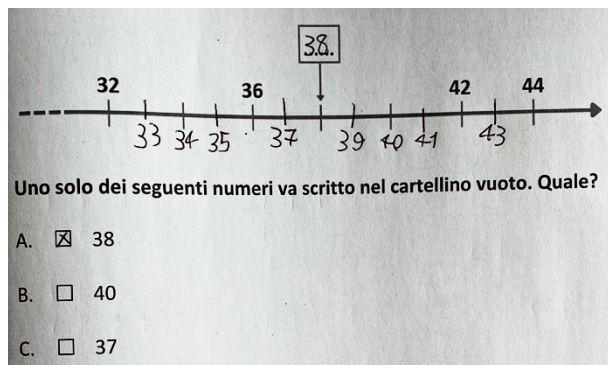
☒ 13

DOMANDA		AMBITO PREVALENTE				
D11. Osserva la retta dei numeri.  Uno solo dei seguenti numeri va scritto nel cartellino vuoto. Quale? A. ☐ 40 B. ☐ 38 C. ☐ 37		NUMERI DIMENSIONE Conoscere RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ. TRAGUARDO Riconosce e utilizza rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione, ...) OBIETTIVO <i>Leggere e scrivere i numeri naturali in notazione decimale, avendo consapevolezza della notazione posizionale; confrontarli e ordinarli, anche rappresentandoli sulla retta</i> SCOPO DELLA DOMANDA Individuare il numero che si trova in una data posizione sulla retta dei numeri				
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE				
B		Item	Mancante	A	B	C
		D11	5,0%	34,8%	51,8%	8,4%
COMMENTI E OSSERVAZIONI						
La domanda richiede di individuare sulla retta dei numeri il numero nella posizione in cui è indicato il <i>cartellino vuoto</i>, desumendo la metrica della retta sulla base dei numeri forniti nell'intervallo tra 32 e 44. Le opzioni di risposta A e C si legano entrambe a una difficoltà di gestione della metrica, presentando alternative che considerano metrica unitaria. Così, partendo dal numero a sinistra del cartellino vuoto, 36, con un 'salto di 1' in avanti si arriva a 37 (36+1; opzione C), mentre partendo dal numero a destra del cartellino vuoto, 42, con due 'salti di 1' all'indietro si arriva a 40 (42-2; opzione A). La domanda offre diverse strategie di ragionamento. Ad esempio, è possibile focalizzarsi sugli unici due numeri su tacche consecutive sulla retta, ovvero 42 e 44, e da questi dedurre che la metrica è pari a 2: nei protocolli seguenti il numero 38 è trovato proprio ricostruendo i salti successivi di 2 tra una tacca e l'altra.						
 Uno solo dei seguenti numeri va scritto nel cartellino vuoto. Quale? A. ☒ 38 B. ☐ 37 C. ☐ 40		 Uno solo dei seguenti numeri va scritto nel cartellino vuoto. Quale? A. ☒ 38 B. ☐ 37 C. ☐ 40				

È anche possibile ricostruire la sequenza dei numeri naturali compresi tra 32 e 44, andando a riempire tutto lo spazio utile e a ritrovare così le esatte corrispondenze con i numeri già presenti al suo interno o desiderati, come esemplifica il protocollo sotto, a sinistra.

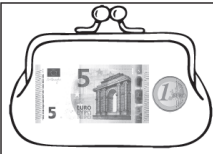
Il protocollo a destra evidenzia una difficoltà di gestione dello spazio in relazione alla metrica della retta, poiché la distanza 4 tra 32 e 36 (i due numeri che precedono la posizione del cartellino vuoto) richiama alla mente la “TABELLINA DEL 4”, inducendo a scrivere nel cartellino il multiplo di 4 successivo a 36: “40”

che è tra le opzioni di risposta. Sembra essere tralasciata la presenza della tacca intermedia tra 32 e 36 e manca controllo sul numero inserito in relazione ai numeri presenti a destra sulla retta: un analogo ragionamento applicato a 42, il numero successivo, è sufficiente a indicare la non accettabilità di 40.

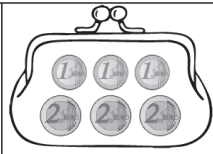


DOMANDA

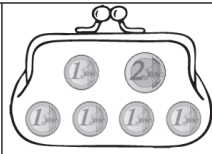
D12. Queste immagini mostrano i borsellini di tre bambine.



Serena



Elisabetta



Giada

Quale bambina ha più euro nel suo borsellino rispetto alle altre?

A. ☐ Serena

B. ☐ Elisabetta

C. ☐ Giada

AMBITO PREVALENTE

NUMERI

DIMENSIONE

Risolvere problemi

RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.

TRAGUARDO

Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria

OBIETTIVO

Leggere, scrivere, confrontare numeri decimali, rappresentarli sulla retta ed eseguire semplici addizioni e sottrazioni, anche con riferimento alle monete o ai risultati di semplici misure

SCOPO DELLA DOMANDA

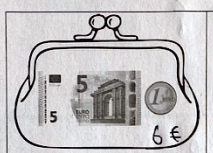
Determinare il valore monetario massimo, sulla base delle informazioni fornite in tre immagini

RISPOSTA CORRETTA	RISULTATI CAMPIONE				
B	Item	Mancante	A	B	C
	D12	3,6%	6,6%	82,1%	7,7%

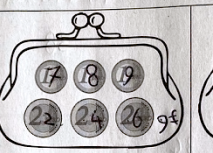
COMMENTI E OSSERVAZIONI

La domanda presenta una situazione problematica che richiede di confrontare il valore in euro delle monete possedute da tre bambine (Serena, Elisabetta e Giada), rappresentate all'interno di tre borsellini, per determinare la bambina che ha più euro rispetto alle altre.

Le opzioni di risposta considerano tutte le possibilità, ovvero i nomi di ciascuna delle tre bambine. Poiché il borsellino di Serena contiene una banconota da 5 euro e una moneta da 1 euro, mentre gli altri due borsellini contengono solo monete da 1 e 2 euro, una strategia di ragionamento efficace può basarsi su passi successivi: prima si esclude la moneta da 1 euro presente in tutti i borsellini; poi si escludono dal borsellino di Elisabetta e da quello di Giada le monete corrispondenti a 5 euro (la banconota di Serena); infine, si confronta il resto delle monete rimaste a Elisabetta e Giada, individuando chi tra loro è rimasta con più euro. Altra strategia efficace risiede nel conteggio diretto degli euro che le bambine hanno e nel loro confronto. I protocolli che seguono esemplificano processi di risoluzione basati sul conteggio.



Serena



Elisabetta



Giada

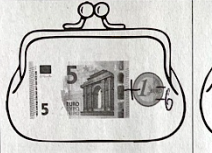
Quale bambina ha più euro nel suo borsellino rispetto alle altre?

A. ☐ Serena

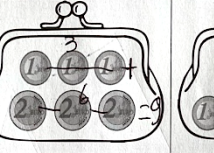
B. ☒ Elisabetta

C. ☐ Giada

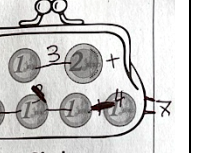
Handwritten notes: 9€6, 7€e



Serena



Elisabetta



Giada

Quale bambina ha più euro nel suo borsellino rispetto alle altre?

A. ☐ Serena

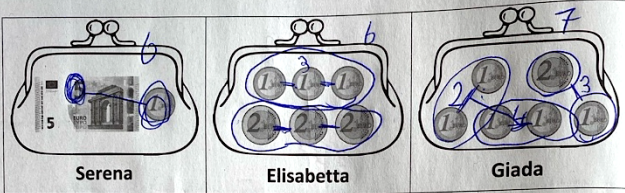
B. ☒ Elisabetta

C. ☐ Giada

In entrambi i casi, il conteggio è operato all'interno dei borsellini: nel protocollo a sinistra, esplicitando all'interno di ciascuna moneta il cambiamento del valore monetario ("2", "4", "6", "7", "8", "9" e infine

“9€” nel caso di Elisabetta, e così via per Giada); a destra, mettendo prima in relazione le monete su una riga e sull'altra attraverso dei segni di collegamento e poi sommando i due valori ottenuti (nel caso di Elisabetta: “3 + 6” e poi “=9”, e così via per Giada). A sinistra, inoltre, i segni lasciati sul foglio a fianco delle opzioni di risposta rivelano l'avvenuto confronto tra i valori monetari, con l'esplicitazione delle due scritture: “9 > 6” e “7 < 9”.

Il protocollo sotto evidenza, in un altro esempio di conteggio, una difficoltà nel mantenere il controllo sul processo risolutivo. Infatti, nel contare gli euro posseduti da Elisabetta, si raggruppano insieme le tre monete da 1 euro e le tre monete da 2 euro ma si finisce per attribuire valore 6 euro alle 6 monete, come se si stesse considerando il numero delle monete invece del loro valore. L'opzione di risposta scelta è di conseguenza *Giada*, avendo lei “7” euro (che in questo caso è il valore monetario massimo).



Quale bambina ha più euro nel suo borsellino rispetto alle altre?

A. ☐ Serena

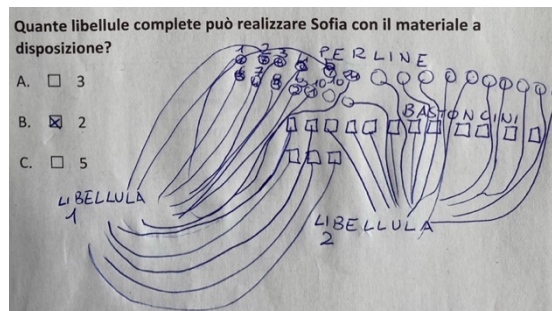
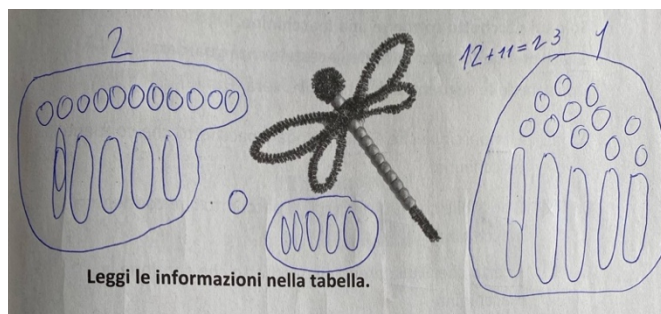
B. ☐ Elisabetta

C. ☒ Giada

Nel protocollo a sinistra, vediamo come l'associazione è direttamente operata tra numeri, con il primo "5" abbinato a "11" (i due numeri sono scritti uno sopra l'altro), il secondo "5" abbinato a "22" e i restanti "5" cancellati. In aggiunta è esplicitato che rimane "SOLO PIÙ 1" perlina (disegnata con un cerchietto) ed è quindi necessario fermarsi ("STOP PERLINE").

Nel protocollo al centro, l'approccio è simile, ma i bastoncini e le perline a disposizione sono disegnati come delle piccole stanghette e dei piccoli cerchi e due gruppi di 5 bastoncini ciascuno (individuati da una linea chiusa) sono abbinati a due gruppi di 11 perline ciascuno (anch'essi individuati da una linea chiusa) ed enumerati con "1" e "2" a intendere il primo e il secondo "GRUPPO".

Medesimo l'approccio nel protocollo a destra, che mostra come il problema sia accessibile attraverso strategie legate alla visualizzazione della relazione. Nei protocolli che seguono ci sono ulteriori esempi.



A sinistra, le libellule che possono essere realizzate sono ricostruite mediante due raggruppamenti di 11 perline e 5 bastoncini ciascuno, enumerati con "1" e "2", mentre la perlina e i 5 bastoncini restanti, disegnati proprio sotto l'immagine della libellula, non hanno alcuna associazione numerica. A destra, ciascuna delle 11 perline (scurite e numerate) è collegata con una linea alla scritta "LIBELLULA 1", insieme a ciascuno dei 5 bastoncini necessari (stilizzati con dei quadratini). La cosa si ripete per altre 11 perline e 5 bastoncini collegati alla scritta "LIBELLULA 2", lasciando scollegati solo la perlina e i 5 bastoncini che non concorrono alla realizzazione di una nuova libellula.

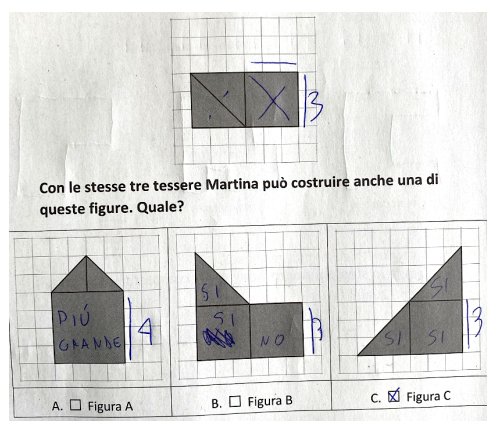
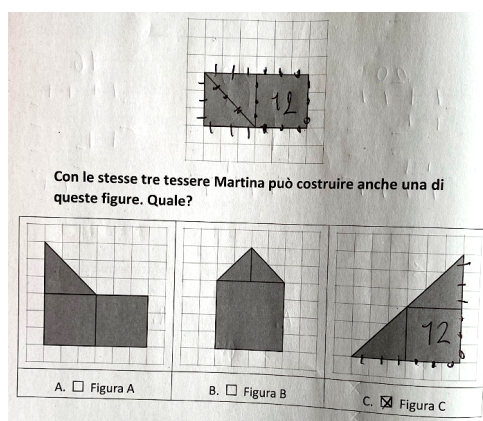
DOMANDA		AMBITO PREVALENTE				
D14. In una cesta ci sono 10 pacchetti chiusi. Solo un pacchetto contiene una macchinina. Giulia prende un pacchetto dalla cesta, senza guardare. Una sola delle seguenti affermazioni è vera. Quale? A. ☐ È certo che Giulia prenda il pacchetto che contiene la macchinina B. ☐ È possibile che Giulia prenda il pacchetto che contiene la macchinina C. ☐ È impossibile che Giulia prenda il pacchetto che contiene la macchinina		DATI E PREVISIONI				
		DIMENSIONE				
		Risolvere problemi				
		RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.				
		TRAGUARDO Riconosce e quantifica, in casi semplici, situazioni di incertezza OBIETTIVO <i>In situazioni concrete, di una coppia di eventi intuire e cominciare ad argomentare qual è il più probabile, dando una prima quantificazione nei casi più semplici, oppure riconoscere se si tratta di eventi ugualmente probabili</i>				
		SCOPO DELLA DOMANDA				
		Determinare se un evento è certo, possibile o impossibile				
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE				
B	Item	Mancante	A	B	C	
	D14	3,1%	15,6%	69,5%	11,8%	
COMMENTI E OSSERVAZIONI						
La domanda richiede di stabilire il <i>grado di incertezza</i> di un evento di estrazione casuale: <i>Giulia prende un pacchetto dalla cesta, senza guardare</i> e si chiede se sia <i>certo, possibile, impossibile</i> che il pacchetto preso contenga una <i>macchinina</i>. L’evento è vincolato alla presenza della macchinina <i>solo in un pacchetto</i>, informazione fornita nel testo. Le affermazioni proposte descrivono in modo qualitativo la <i>probabilità</i> che l’estrazione della macchinina si verifichi o meno. Per rispondere scegliendo la risposta corretta B (<i>È possibile</i>), è necessario riconoscere che la macchinina è presente tra i dieci pacchetti ma non è garantito che Giulia prenda proprio il pacchetto che contiene la macchinina. Le due informazioni essenziali per articolare il ragionamento sono espresse in forma verbale: ci sono 10 pacchetti e solo uno di essi contiene la macchinina. Il protocollo che segue esemplifica proprio l’importanza dell’evidenziazione di tali informazioni (e della comprensione del testo).						
In una cesta ci sono <u>10 pacchetti chiusi</u>. <u>Solo un pacchetto contiene una macchinina.</u> Giulia prende un pacchetto dalla cesta, senza guardare. Una sola delle seguenti affermazioni è vera. Quale? A. ☒ È possibile che Giulia prenda il pacchetto che contiene la macchinina B. ☐ È certo che Giulia prenda il pacchetto che contiene la macchinina C. ☐ È impossibile che Giulia prenda il pacchetto che contiene la macchinina						

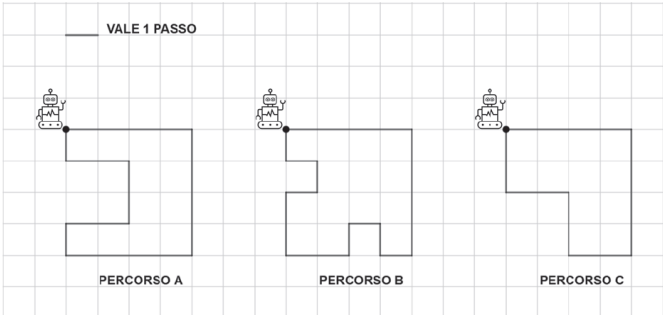
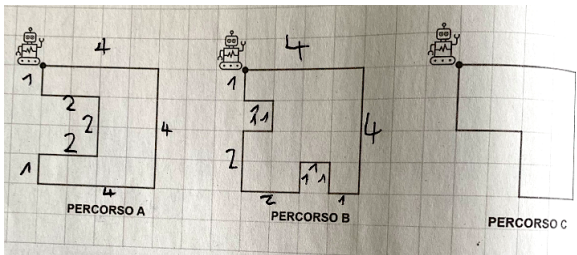
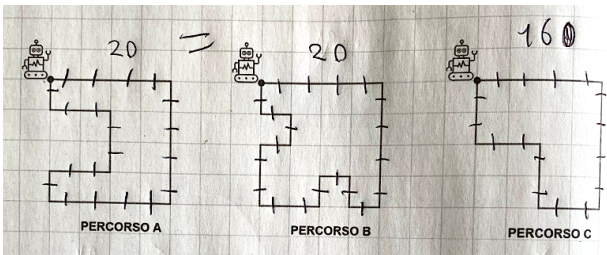
DOMANDA		AMBITO PREVALENTE				
D15. In un sacchetto ci sono 8 caramelle. Una bambina apre il sacchetto e mangia più di due caramelle. Quante caramelle rimangono nel sacchetto? Indica la risposta che è CERTAMENTE vera. A. ☐ Non rimangono caramelle nel sacchetto B. ☐ Rimangono meno di sei caramelle nel sacchetto C. ☐ Rimangono sei caramelle nel sacchetto		NUMERI				
		DIMENSIONE				
		Argomentare				
		RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.				
		TRAGUARDO				
		Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici				
		OBBIETTIVO				
		Eseguire mentalmente semplici operazioni con i numeri naturali e verbalizzare le procedure di calcolo				
		SCOPO DELLA DOMANDA				
		Stabilire la verità o falsità di tre affermazioni relative a un numero di oggetti in contesto				
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE				
B	Item	Mancante	A	B	C	
	D15	6,1%	9,2%	50,8%	33,9%	
COMMENTI E OSSERVAZIONI						
La domanda richiede di individuare quale, tra le affermazioni date, fornisce una stima corretta della quantità di <i>caramelle</i> che <i>rimangono</i> in un sacchetto, dopo che una bambina ne ha mangiate <i>più di due</i> su otto (quelle presenti all’inizio nel sacchetto). Per rispondere alla domanda non è necessario eseguire un’operazione aritmetica, bensì ragionare su un vincolo di disuguaglianza e stabilire quale delle tre conclusioni sia necessariamente valida. L’espressione <i>più di due</i> esclude logicamente l’opzione di risposta C (<i>Rimangono 6 caramelle nel sacchetto</i>) che presupporrebbe esattamente due caramelle mangiate. Non esclude invece di per sé la possibilità dell’opzione A (<i>Non rimangono caramelle nel sacchetto</i>), poiché il fatto di aver mangiato più di due caramelle include la possibilità di averle mangiate tutte e otto. Per escludere tale conclusione, è necessario focalizzarsi anche sulla richiesta che la risposta sia <i>CERTAMENTE vera</i>. L’opzione di risposta B (<i>Rimangono meno di sei caramelle</i>) è quindi l’unica che vale in ogni scenario compatibile con il testo. La presenza di <i>CERTAMENTE</i> nel testo e il riferimento alla sottrazione “$8-2=6$” come punto di partenza del ragionamento sono comunque importanti, come mostra il protocollo seguente, nel quale l’avverbio risulta sottolineato.						
In un sacchetto ci sono <u>8</u> caramelle. Una bambina apre il sacchetto e mangia più di due caramelle. Quante caramelle rimangono nel sacchetto? Indica la risposta che è <u>CERTAMENTE</u> vera. A. ☒ Rimangono meno di sei caramelle nel sacchetto B. ☐ Non rimangono caramelle nel sacchetto C. ☐ Rimangono sei caramelle nel sacchetto $8 - 2 = 6$						
La distribuzione delle risposte del campione nazionale indica che circa il 51% delle risposte è corretto e che la risposta 6 ha una percentuale di scelta pari quasi a 34%. Quest’ultima opzione deriva proprio dal calcolo $8-2=6$ e indica come una difficoltà frequente risieda nell’operare direttamente la sottrazione con i numeri presenti nel testo senza tenere conto dell’espressione <i>più di</i>.						

[illegible]

Nel protocollo a sinistra, linee di corrispondenza collegano le parti originali alle stesse parti nella Figura C, con i triangoli indicati da crocette. A destra, invece, la corrispondenza è stabilita esplicitando in modo sintetico la tipologia e il numero di figure della composizione, con le etichette: “1 QUADRATO” e “2 TRIANGOLI”, scritte sia all’interno della figura di partenza sia all’interno della nuova figura.

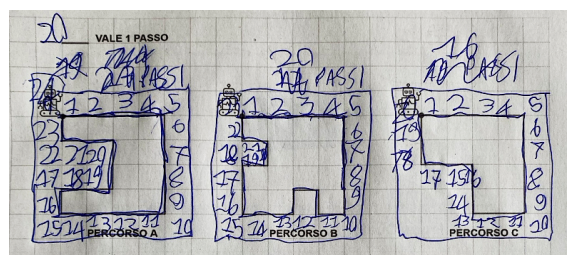
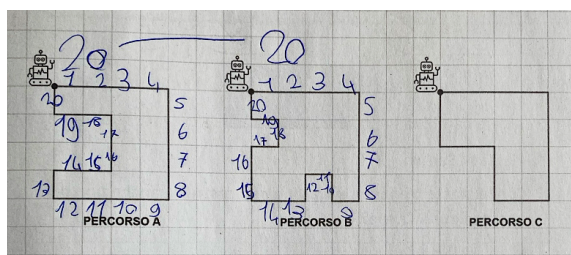
I protocolli sotto tengono traccia di altri tipi di corrispondenza. Nell’esempio a sinistra, si lavora principalmente sul perimetro del quadrato e sul lato dei triangoli (come si evince dai segni di spunta aggiunti sul foglio e dall’annotazione del numero “12” sia nella figura originaria sia in quella di arrivo per indicare il perimetro del quadrato). Nell’esempio a destra, il confronto è operato essenzialmente sulla lunghezza del lato del quadrato (“3”), che fa escludere subito la *Figura A* (dove il quadrato ha lato “4”, cioè “PIÙ GRANDE”), e solo successivamente sul numero di figure (il “NO” inserito nel secondo quadrato della *Figura B* indica una mancanza di corrispondenza e la conseguente esclusione di questa figura, che ha compatibili con la figura iniziale solo 2 pezzi su 3). I tre “SÌ” nella *Figura C* eliminano ogni dubbio sulla scelta.



DOMANDA		AMBITO PREVALENTE			
D17. Un robot si muove lungo tre percorsi diversi. Per ogni percorso il robot parte dal punto indicato dal pallino • , percorre la linea nera e torna al punto di partenza.  Il robot fa lo stesso numero di passi per completare due dei percorsi. Quali? Risposta: il PERCORSO e il PERCORSO		SPAZIO E FIGURE			
		DIMENSIONE			
		Conoscere			
		RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.			
		TRAGUARDO Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo OBIETTIVO Eseguire un semplice percorso partendo dalla descrizione verbale o dal disegno, descrivere un percorso che si sta facendo e dare le istruzioni a qualcuno perché compia un percorso desiderato			
		SCOPO DELLA DOMANDA			
		Confrontare tra loro le lunghezze di tre percorsi su una griglia quadrettata, fornita l'unità			
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE			
il PERCORSO A e il PERCORSO B oppure il PERCORSO B e il PERCORSO A		Item	Mancante	Errata	Corretta
		D17	6,9%	47,7%	45,4%
COMMENTI E OSSERVAZIONI					
La domanda presenta tre percorsi tracciati su una griglia quadrettata, con l'unità di misura indicata esplicitamente: un lato di quadretto VALE 1 PASSO. Per ogni percorso, è disegnato <i>un robot</i> che si deve muovere lungo di esso: il robot <i>parte</i> da un punto segnato, <i>percorre la linea nera e torna al punto di partenza</i>. La domanda richiede di mettere a confronto i tre percorsi per individuare i due che il robot completa con <i>lo stesso numero di passi</i> (ovvero, che hanno la stessa lunghezza). La risposta attesa è <i>il PERCORSO A e il PERCORSO B</i>, poiché sono lunghi entrambi 20 passi, mentre il Percorso C è lungo 16 passi. Una criticità risiede qui nella gestione del conteggio dei passi su tracciati rappresentati da figure chiuse ma non regolari, caratterizzate dalla presenza di rientranze e sporgenze. Nel risolvere la domanda è quindi necessario gestire difficoltà note in didattica della matematica, relative alla misura di lunghezze (che possono essere associate alla dimenticanza di alcuni lati o alla confusione tra lati di quadretti e quadretti adiacenti al contorno). Osserviamo che, in effetti, le risposte alla domanda si suddividono quasi equamente in errate e corrette (circa 48% e 45% rispettivamente), intercettando quindi un aspetto di delicata importanza nello sviluppo di pensiero geometrico. I protocolli sotto, entrambi associati alla risposta attesa, esemplificano strategie di ragionamento efficaci in cui la procedura di conteggio è resa visibile grazie ai segni aggiunti sul foglio.					
 					

A sinistra, la lunghezza in passi di ogni tratto rettilineo è esplicitata accanto al tratto stesso: la somma di tutte le lunghezze trovate per i percorsi A e B dà la stessa lunghezza complessiva e il percorso C non è neppure preso in considerazione. A destra, un segno è aggiunto in corrispondenza di ogni passo (su ogni lato di quadretto) lungo l'intero perimetro di ciascun percorso, il che permette di tenere traccia di ciò che è già stato contato. Il segno "=" inserito tra i due "20" scritti sopra i percorsi A e B esprime l'uguaglianza delle loro lunghezze.

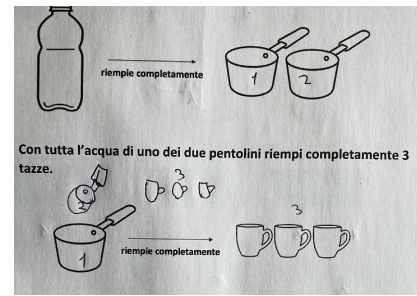
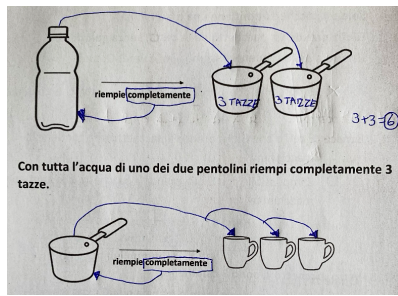
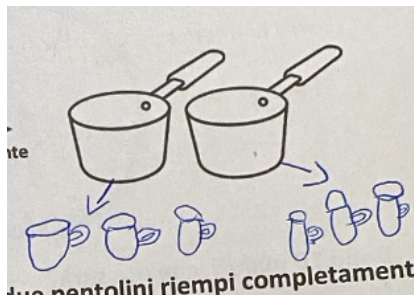
Nei seguenti protocolli, il conteggio dei passi è operato in modo progressivo: i numeri "1", "2", "3", e così via, sono scritti nell'ordine in cui si immagina il robot avanzare, rivelando anche il verso di percorrenza del percorso.



Nuovamente, nell'esempio a sinistra, la corrispondenza trovata tra i primi due percorsi è sufficiente e la considerazione del terzo percorso diviene superflua. A destra, la sequenza del numero di passi è indicata su tutti e tre i percorsi, con i totali "20 PASSI", "20 PASSI" e "16 PASSI" riportati sopra ciascuno di essi a esplicitare il confronto.

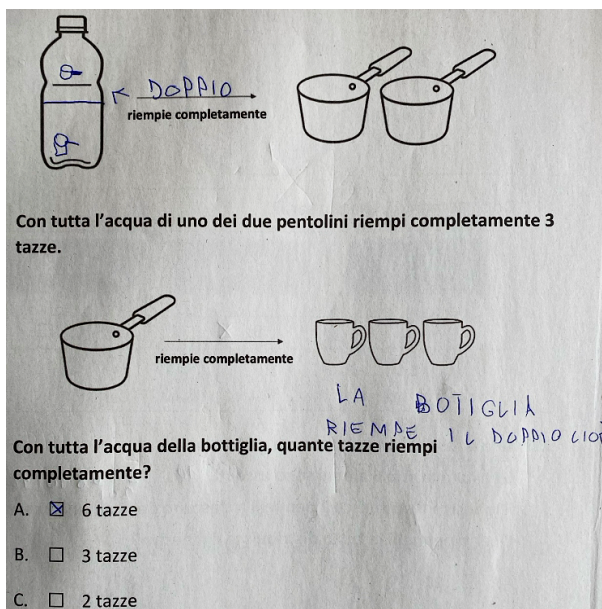
[illegible]

I protocolli che seguono mostrano strategie di ragionamento efficaci che rendono visibile il raddoppio del numero di tazze riempibili.



A sinistra, 3 tazze sono disegnate (e indicate con una freccia) sotto ciascuno dei 2 pentolini della prima immagine, materializzando la nuova relazione 2 pentolini/6 tazze. Nel protocollo al centro, la stessa struttura è catturata dalle (2) frecce che collegano la bottiglia a entrambi i pentolini e poi dalle (3) frecce che collegano il pentolino alle tre tazze, informazione anche scritta dentro l'immagine di ciascun pentolino nella prima immagine. La scrittura " $3+3=6$ " che compare a fianco esplicita il risultato finale. A destra, i pentolini in alto sono etichettati con "1" e "2" e un secondo pentolino è aggiunto in basso con accanto il disegno di tre tazze e l'indicazione "3" sopra ogni gruppo di tazze, costruendo visivamente la nuova relazione 2 pentolini/6 tazze.

Nel protocollo sotto, a sinistra, è esplicitata in forma verbale la relazione di "DOPPIO" tra 1 bottiglia e 2 pentolini e la bottiglia è divisa graficamente a metà e in ciascuna metà è disegnato un pentolino. Sotto le tazze della seconda relazione compare infine la frase "LA BOTIGLIA RIEMPE IL DOPPIO CIOÈ 6", che sfrutta la precedente generalizzazione e porta alla scelta della risposta attesa. Il protocollo, a destra, pur privo di risposta, mostra un interessante tentativo di suddividere visivamente la bottiglia in unità più piccole enumerate in modo progressivo sfruttando l'altezza, e così i due pentolini e una tazza appaiono suddivisi da linee che sfruttano l'altezza. Tuttavia, il procedimento non converge verso una scelta di risposta.



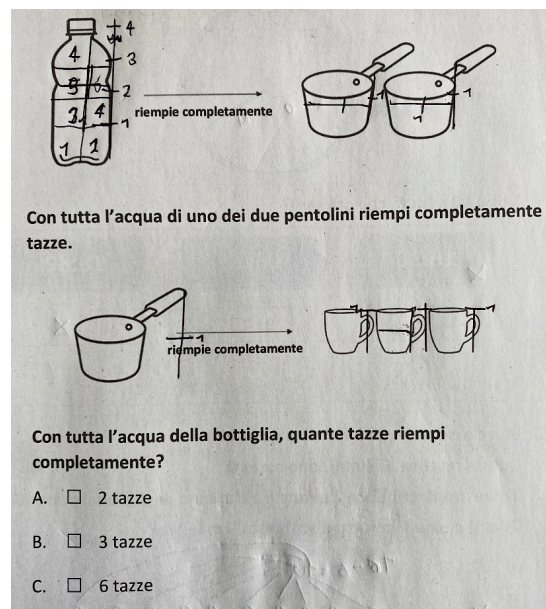
Con tutta l'acqua di uno dei due pentolini riempi completamente 3 tazze.

Con tutta l'acqua della bottiglia, quante tazze riempi completamente?

A. ☒ 6 tazze

B. ☐ 3 tazze

C. ☐ 2 tazze



Con tutta l'acqua di uno dei due pentolini riempi completamente 3 tazze.

Con tutta l'acqua della bottiglia, quante tazze riempi completamente?

A. ☐ 2 tazze

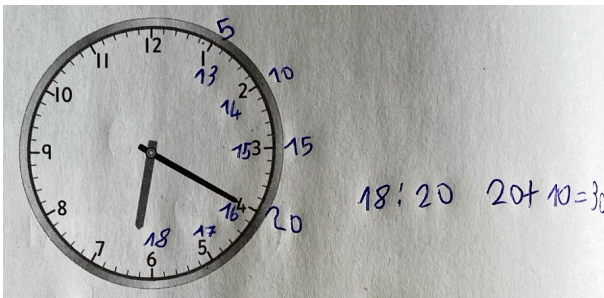
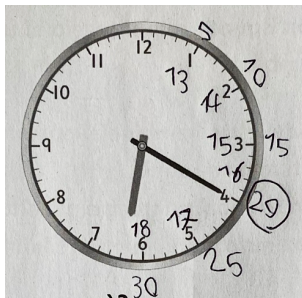
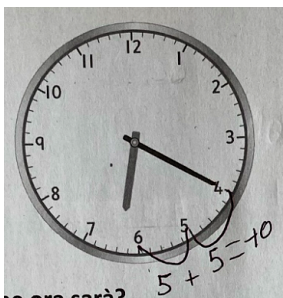
B. ☐ 3 tazze

C. ☐ 6 tazze

DOMANDA	AMBITO PREVALENTE
D19. È pomeriggio. L'orologio in cucina segna questa ora.  Dopo 10 minuti, che ora sarà? 18:30 A. ☐ 06:20 B. ☐ 16:30 C. ☐	DATI E PREVISIONI
	DIMENSIONE
	Conoscere
	RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.
	TRAGUARDO Utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro...)
OBIETTIVO <i>Misurare grandezze (lunghezze, tempo, ecc.) utilizzando sia unità arbitrarie sia unità e strumenti convenzionali (metro, orologio, ecc.)</i>	
SCOPO DELLA DOMANDA	
Individuare l'orario ottenuto da un'ora assegnata, trascorso un dato intervallo di tempo	

RISPOSTA CORRETTA	RISULTATI CAMPIONE				
A	Item	Mancante	A	B	C
	D19	3,7%	36,1%	38,2%	22,1%

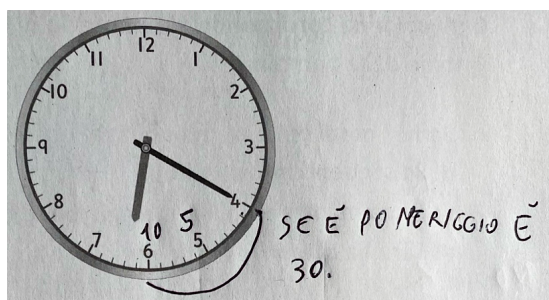
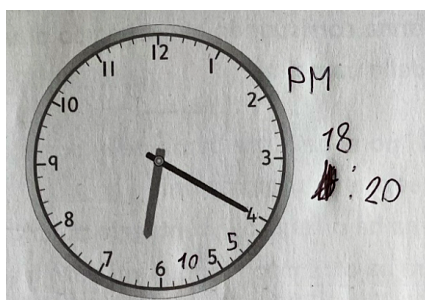
COMMENTI E OSSERVAZIONI
La domanda richiede di leggere l'ora indicata su un orologio analogico al fine di individuare quale sarà l'ora espressa in formato digitale <i>dopo 10 minuti</i>. Il vincolo: è <i>pomeriggio</i>, indicato nel testo, contestualizza e richiede di interpretare l'ora sull'orologio analogico come le 18:20, prima di aggiungere dieci minuti e arrivare alla risposta 18:30. L'opzione di risposta B (6:20) presenta una lettura dell'ora in formato analogico, che trascura sia il riferimento al pomeriggio sia il passaggio dei dieci minuti, verosimilmente quindi senza attenzione alla parte testuale della domanda. L'opzione di risposta C (16:30) considera una difficoltà di lettura dell'ora che scambia il ruolo delle due lancette. Se la lancetta delle ore è confusa con quella dei minuti (e viceversa), infatti, tenuto conto del pomeriggio, l'orario risulta essere (circa) le 16:30. Notiamo dalle percentuali di risposta del campione che l'opzione B è risultata la più attraente (38,2%), superando anche l'opzione di risposta corretta (36,1%), e come l'opzione C è stata comunque molto scelta (22,1%), a testimonianza del fatto che la competenza di lettura dell'orologio è una competenza delicata. Strategie di ragionamento efficaci possono basarsi sull'esplicitazione di segni sull'orologio che aiutano a ricostruire l'orario pomeridiano o il passaggio dei 10 minuti. I protocolli che seguono esemplificano diversi approcci di questo tipo.

		
---	--	---

Nell'esempio a sinistra e in quello centrale, la corrispondenza con le ore pomeridiane è indicata dai numeri inseriti all'interno del quadrante ("13", "14", "15", e così via fino a "18"); la corrispondenza con i minuti è invece espressa dai numeri aggiunti all'esterno ("5", "10", "15", e così via). Nel primo caso, l'ora

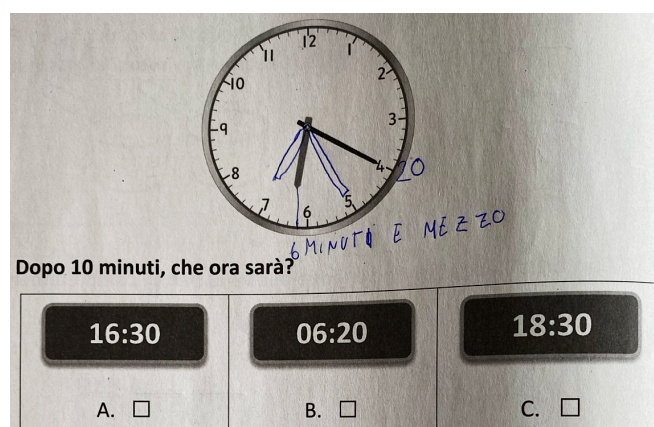
di partenza è poi esplicitata "18:20" assieme al calcolo " $20+10=30$ "; nel secondo caso invece il conteggio dei minuti arriva fino a "30". Nel protocollo a destra, la scrittura " $5+5=10$ " è accompagnata da due archi che catturano il passaggio dei 10 minuti attraverso un doppio salto di cinque minuti, il quale lascia immaginare la lancetta dei minuti che si muove da 4 a 6.

Nei protocolli sotto l'attenzione al contesto pomeridiano è resa esplicita in forme diverse: da un lato, mediante l'esplicitazione delle scritture "PM" (la tipica sigla che si usa nella lingua inglese per le ore della seconda parte della giornata) e "18:20"; dall'altro lato, con l'espressione verbale "SE È POMERIGGIO È 30" (che riduce la possibilità di risposta alla scelta tra 16:30 e 18:30), unita alla freccia di collegamento tra 6 e 4 e ai numeri "5" e "10" aggiunti all'interno del quadrante a indicare il passaggio dei dieci minuti.



Il protocollo che segue è un esempio in cui non è stata scelta alcuna opzione di risposta e rientra dunque nel computo dell'esigua percentuale di risposte mancanti (3,7%).

È interessante osservare come nel quadrante dell'orologio siano state disegnate due nuove lancette, l'una più corta e l'altra più lunga, la prima in corrispondenza del 7 e la seconda del 5, come se il passaggio dei 10 minuti fosse stato interpretato con lo spostamento da 4 a 5 della lancetta dei minuti e con lo spostamento da 6 a 7 della lancetta delle ore. La risposta alla domanda: *Dopo 10 minuti, che ora sarà?*, esplicitata accanto al punto interrogativo, "6 MINUTI E MEZZO", rivela una gestione erranea di lettura dell'ora che induce a non trovare corrispondenza nelle opzioni di risposta e a non sceglierne alcuna.



DOMANDA		AMBITO PREVALENTE				
D20. Una classe seconda è formata da 16 alunni. Questa mattina 6 alunni sono assenti. Il maestro distribuisce 2 pennelli a ciascuno degli alunni presenti. Quanti pennelli in tutto distribuisce il maestro? A. ☐ 10 B. ☐ 20 C. ☐ 32		NUMERI				
		DIMENSIONE				
		Risolvere problemi				
		RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.				
		TRAGUARDO Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria OBIETTIVO <i>Eseguire mentalmente semplici operazioni con i numeri naturali e verbalizzare le procedure di calcolo</i>				
		SCOPO DELLA DOMANDA				
		Determinare la quantità di oggetti che risolve una situazione problematica espressa in forma verbale				
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE				
B	Item	Mancante	A	B	C	
	D20	4,9%	40,0%	45,7%	9,4%	
COMMENTI E OSSERVAZIONI						
La domanda presenta una situazione problematica espressa in forma verbale la cui risoluzione richiede due passaggi: dapprima sottrarre il numero di <i>alunni assenti</i> dal numero totale di alunni di una classe per determinare quanti sono presenti ($16-6 = 10$), poi raddoppiare il numero di alunni presenti per ottenere <i>quanti pennelli distribuisce il maestro</i> ($10 \times 2 = 20$). Le opzioni di risposta A e C (10 e 32) intercettano entrambe una difficoltà di gestione delle variabili in gioco. In particolare, nel primo caso ci si concentra unicamente sul numero di alunni presenti (10). La percentuale di scelta 40% sottolinea che questa è una difficoltà frequente e, di conseguenza, l'importanza di una lettura attenta del testo. Nel secondo caso, si traslascia l'assenza di 6 alunni, mantenendo però che i pennelli distribuiti a ciascuno sono 2 ($16 \times 2 = 32$) come se, nel testo, fosse scritto che <i>il maestro distribuisce 2 pennelli a ciascuno degli alunni</i> (sottintendendo, della classe). È una difficoltà molto meno diffusa della precedente (9,4%). Strategie di ragionamento efficaci consistono nel mantenere il controllo su entrambi i passaggi richiesti. Vari esempi sono mostrati nei protocolli che seguono, tutti associati alla scelta della risposta 20.						
$16 - 6 = 10$ $10 \times 2 = 20$ $16 - 6 = 10$ 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 $16 - 6 = 10$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20						
Nel protocollo a sinistra sono esplicitate entrambe le operazioni aritmetiche “$16-6 = 10$” e “$10 \times 2 = 20$”, scritte una sotto l'altra, rendendo visibile la struttura sequenziale del ragionamento, con il risultato della prima operazione usato come punto di partenza della seconda. Il protocollo al centro mostra un'analogia struttura del ragionamento, con la variante grafica delle dieci linee che collegano “10”, risultato di “$16-6$” con altrettanti “2” disposti in fila (a indicare i 2 pennelli distribuiti a ciascun alunno). A questi sono associati subito sotto i 10 numeri pari che indicano il conteggio dei pennelli (“2”, “4”, “6”, e così via fino a						

"20"). Il protocollo a destra rivela un approccio molto simile, ma anziché utilizzare come punto di partenza i 2 pennelli si fa qui riferimento ai 10 alunni presenti ("1", "2", "3", e così via fino a "10") e a ciascuno è associato con una freccia il numero di pennelli che cresce ("2", "4", "6", e così via fino a "20"). I protocolli sotto replicano il secondo passaggio del ragionamento senza esplicitazione dell'operazione iniziale. In un caso (a sinistra), vediamo la sequenza "2/4/6/8/10/12/14/16/18/20" associata da una freccia alla scrittura "PER 10 VOLTE" che sottintende il fatto di contare 2 per 10 volte. Analogamente, a destra, dieci "2" sono disposti in fila con frecce che li collegano ai corrispondenti numeri da 1 a 10 e su questi si opera il conteggio dei pennelli (le sottolineature nel testo evidenziano le due variabili da prendere in considerazione, ovvero l'assenza di 6 alunni e i 2 pennelli a ciascuno dei presenti).

Una classe seconda è formata da 16 alunni.

Questa mattina 6 alunni sono assenti.

Il maestro distribuisce 2 pennelli a ciascuno degli alunni presenti.

Quanti pennelli in tutto distribuisce il maestro?

- A. ☒ 20 2/4/6/8/10/12/14/16/18/20
 B. ☐ 32 PER 10 VOLTE
 C. ☐ 10

Una classe seconda è formata da 16 alunni.

Questa mattina 6 alunni sono assenti.

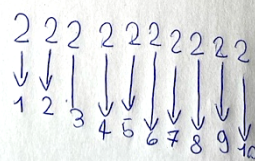
Il maestro distribuisce 2 pennelli a ciascuno degli alunni

Quanti pennelli in tutto distribuisce il maestro?

A. ☐ 32

B. ☐ 10

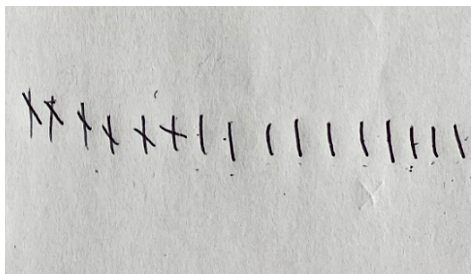
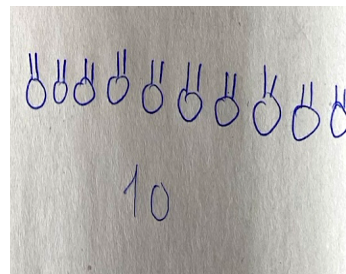
C. ☒ 20

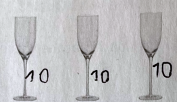
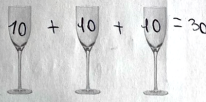
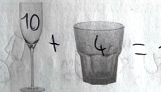
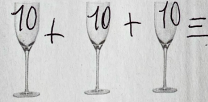
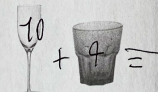
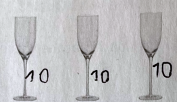
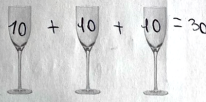
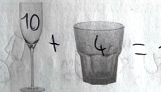
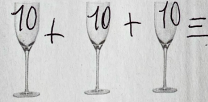
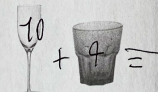
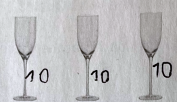
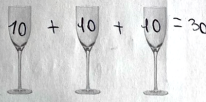
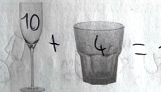
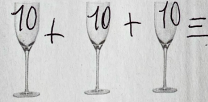
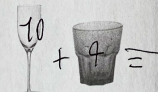


Altre strategie si basano su una diversa esplicitazione della relazione 'a ciascun alunno presente 2 pennelli'. Un esempio è mostrato nei protocolli seguenti, a sinistra, dove quasi in forma tabulare si trovano una prima colonna con indicati 10 alunni ("1 A.", "2 A.", "3 A.", eccetera) e una seconda colonna con indicato a ripetizione "2 P." (2 pennelli) intervallati dal segno "+", che ne indica la somma. I due protocolli al centro e a destra invece lasciano intravedere approcci iconici al numero di alunni presenti o ai pennelli da raddoppiare.

10 ALUNNI
 2 x 10 = 20

1 A.	2 P.
2 A.	2 P.
3 A.	2 P.
4 A.	2 P.
5 A.	2 P.
6 A.	2 P.
7 A.	2 P.
8 A.	2 P.
9 A.	2 P.

DOMANDA		AMBITO PREVALENTE																											
D21. Completa la tabella: scrivi sopra i puntini il costo che manca. <table><tr><th>Bicchieri</th><th>Costo</th></tr><tr><td></td><td>30 euro</td></tr><tr><td></td><td>14 euro</td></tr><tr><td></td><td>..... euro</td></tr></table>		Bicchieri	Costo		30 euro		14 euro		 euro	RELAZIONI E FUNZIONI																			
		Bicchieri	Costo																										
			30 euro																										
			14 euro																										
			 euro																										
DIMENSIONE																													
Risolvere problemi																													
RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.																													
		TRAGUARDO																											
		Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria																											
		OBIETTIVO																											
		Eseguire mentalmente semplici operazioni con i numeri naturali e verbalizzare le procedure di calcolo																											
		SCOPO DELLA DOMANDA																											
		Determinare il costo di un oggetto a partire dai costi complessivi di due insiemi di oggetti																											
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE																											
4	Item	Mancante	Errata	Corretta																									
	D21	7,0%	36,5%	56,5%																									
COMMENTI E OSSERVAZIONI																													
La domanda richiede di determinare il costo di un bicchiere a partire dai costi complessivi di due gruppi di tipologie diverse di bicchieri, che sono presentati con delle immagini in una tabella. Per rispondere occorre mettere in relazione tra loro le diverse informazioni: dal costo complessivo di <i>tre calici</i> si ricava il costo unitario di un calice (10 euro, poiché tre calici costano 30 euro); poi, dal costo complessivo della <i>coppia calice/bicchiere</i> si ricava per differenza il costo del bicchiere: 4 euro (poiché un calice e un bicchiere costano insieme 14 euro e il calice ne costa 10). 4 euro è dunque il costo da inserire nella terza riga. Strategie di ragionamento efficaci necessitano di mantenere il controllo su tutte le variabili in gioco: il numero dei bicchieri, la composizione dei gruppi, i costi complessivi. Alcuni esempi sono mostrati nei protocolli seguenti, dove il prezzo di ciascun bicchiere è esplicitato in corrispondenza della sua immagine ("10" per ogni calice, "4" per il bicchiere e riportato come risposta). Nel protocollo centrale, vediamo il calcolo "$10+4=14$" come controllo esplicito del costo complessivo del secondo gruppo di bicchieri. In questo protocollo e in quello a destra vediamo inoltre segni di addizione che servono a evidenziare la relazione tra gli elementi di ciascun gruppo e il costo nella seconda colonna.																													
<table><tr><th>Bicchieri</th><th>Costo</th></tr><tr><td></td><td>30 euro</td></tr><tr><td></td><td>14 euro</td></tr><tr><td></td><td>4 euro</td></tr></table> <table><tr><th>Bicchieri</th><th>Costo</th></tr><tr><td></td><td>30 euro</td></tr><tr><td></td><td>14 euro</td></tr><tr><td></td><td>4 euro</td></tr></table> <table><tr><th>Bicchieri</th><th>Costo</th></tr><tr><td></td><td>30 euro</td></tr><tr><td></td><td>14 euro</td></tr><tr><td></td><td>4 euro</td></tr></table>						Bicchieri	Costo		30 euro		14 euro		4 euro	Bicchieri	Costo		30 euro		14 euro		4 euro	Bicchieri	Costo		30 euro		14 euro		4 euro
Bicchieri	Costo																												
	30 euro																												
	14 euro																												
	4 euro																												
Bicchieri	Costo																												
	30 euro																												
	14 euro																												
	4 euro																												
Bicchieri	Costo																												
	30 euro																												
	14 euro																												
	4 euro																												

La percentuale di risposte errate è piuttosto alta (36,5%), sottolineando che difficoltà legate al controllo sulle relazioni tra le diverse variabili sono dietro l'angolo. Un esempio è visibile nel protocollo sotto, dove è stata data risposta "26 euro".

Non sono presenti segni sul foglio: difficile dirimere se 26 possa essere il risultato (errato) dell'operazione $30-14$, nella quale si dimentica il cambio.

Bicchieri	Costo
	30 euro
	14 euro
	26 euro

DOMANDA	AMBITO PREVALENTE
D22. Se aggiungi 3 unità e 4 decine al numero 42, quale numero ottieni? A. ☐ 49 B. ☐ 76 C. ☐ 85	NUMERI
	DIMENSIONE
	Conoscere
	RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.
	TRAGUARDO L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice OBIETTIVO <i>Leggere e scrivere i numeri naturali in notazione decimale, avendo consapevolezza della notazione posizionale; confrontarli e ordinarli, anche rappresentandoli sulla retta</i>
	SCOPO DELLA DOMANDA Individuare la somma di numeri assegnati utilizzando il valore posizionale delle cifre

RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE			
C	Item	Mancante	A	B	C
	D22	7,0%	25,9%	12,7%	54,4%

COMMENTI E OSSERVAZIONI

La domanda richiede di individuare, tra tre opzioni, il numero che si ottiene aggiungendo *al numero 42* sia *3 unità* sia *4 decine*.

Per scegliere la risposta 85, è necessario ricorrere alla conoscenza del valore posizionale delle cifre in modo da tradurre le due espressioni 3 unità e 4 decine nei valori numerici corrispondenti, ovvero 3 e 40, prima di procedere con il calcolo additivo ($42+3+40 = 85$).

Le opzioni di risposta A (49) e B (76) considerano entrambe difficoltà di lettura e interpretazione del valore posizionale delle cifre. Infatti, 49 è il numero che si ottiene da $42+3+4$, ovvero dall'aggiungere 7 unità a 42. Le 4 decine sono qui trattate alla stregua delle unità (4 unità). 76 è invece il numero che si ottiene da $42+34$, ovvero dall'aggiungere a 42 il numero 34, avendo tradotto "3 unità e 4 decine" nel numero composto dalle cifre 3 e 4 affiancate nell'ordine in cui compaiono nel testo. La difficoltà è di tipo lessicale ancor prima che numerico, con l'ordine di lettura che oscura il valore da attribuire data l'indicazione "unità" e "decine".

Una strategia di ragionamento efficace si basa sulla riscrittura di 3 unità e 4 decine negli addendi 3 e 40 rispettivamente, prima di sommarli al numero di partenza, scomponendo il calcolo in passi successivi. I protocolli che seguono esemplificano proprio tale strategia.

aggiungi 3 unità e 4 decime al numero 42, quale numero ottieni?

☒ 85

☐ 76

☐ 49

DA U

$$\begin{array}{r} 42 + \\ 43 = \\ \hline 85 \end{array}$$

$40 + 3 = 43$

aggiungi 3 unità e 4 decine al numero 42, quale n

☐ 76

☐ 49

☒ 85

$42 + 3 + 40 = 85$

$80 + 5 =$

Nell'esempio a sinistra, l'operazione " $40+3 = 43$ " scritta in alto, sul lato destro del foglio, precede la successiva operazione scritta in colonna con l'esplicitazione delle etichette "*DA*" e "*U*" a indicare il valore posizionale che permette di procedere con il calcolo " $42+43 = 85$ ".

Nell'esempio a destra, troviamo l'addizione a tre termini " $42+3+40=85$ ", gestita mediante linee di collegamento che sfruttano il valore posizionale organizzando visivamente la somma delle decine da un lato (4 decine e 4 decine) e la somma delle unità dall'altro (2, 3 e 0 unità), esplicitate nella scrittura finale " $80+5=$ " che porta in modo analogo a " 85 ". Il riordino consapevole che separa la somma delle decine dalla somma delle unità per poi ricombinarle evidenzia una padronanza della struttura posizionale del sistema di numerazione applicata alla strategia di calcolo.

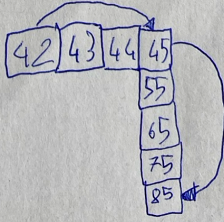
Interessante nel protocollo sotto la rappresentazione utilizzata per sommare a 42 dapprima le 3 unità e poi le 4 decine (entrambe evidenziate nel testo). La freccia orizzontale indica la prima operazione, con il passaggio da " 42 " a " 45 ". La freccia verticale indica invece la seconda operazione, con il passaggio da " 45 " a " 85 " (la rappresentazione ricorda direzioni e modalità di conteggio tipiche all'interno della tavola dei primi cento numeri).

Se aggiungi 3 unità e 4 decine al numero 42, quale numero ottieni?

A. ☒ 85

B. ☐ 76

C. ☐ 49

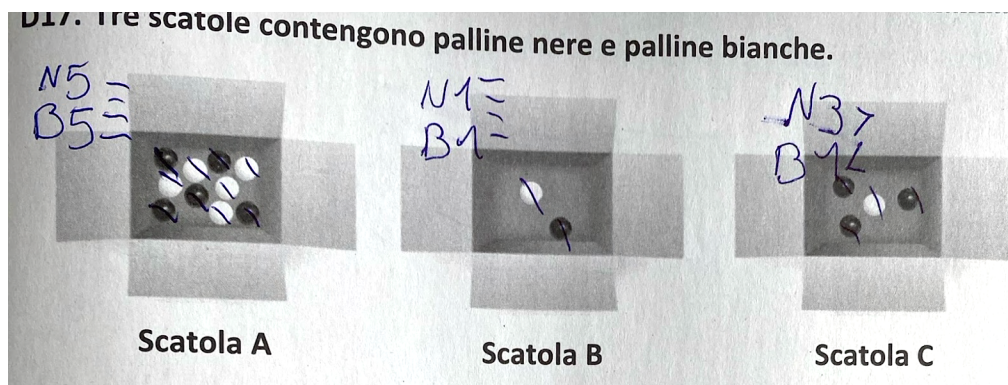


Questa strategia rende visibile in una direzione il solo cambiamento delle unità e nell'altra il solo cambiamento delle decine.

[illegible]

pallina nera è infatti in entrambi i casi pari a 50%. La scelta di questa opzione si fonda sull'attribuzione al numero ridotto di palline di un effetto di maggior prevedibilità dell'estrazione, indipendentemente dal rapporto tra palline di un colore e palline di un altro.

Strategie di ragionamento efficaci consistono nel contare separatamente le palline nere e quelle bianche in ciascuna scatola e confrontarne le quantità per ogni scatola, prima di procedere al confronto tra le scatole. È così possibile riconoscere che solo nella scatola C il numero di palline nere supera quello delle palline bianche, rendendo l'estrazione di una pallina nera più probabile rispetto all'estrazione di una pallina bianca. Il protocollo sotto fornisce un esempio.



Per ciascuna scatola, le scritture " $N5 = B5 =$ ", " $N1 = B1 =$ " e " $N3 > B1 <$ ", dove " N " e " B " indicano rispettivamente le palline nere e le palline bianche, esprimono i conteggi delle palline di diverso tipo e la relazione tra i numeri conteggiati (mediante i simboli "=", ">" e "<"). In particolare, la scrittura " $N3 > B1 <$ " rivela che il numero delle palline nere è maggiore e quello delle palline bianche è minore.

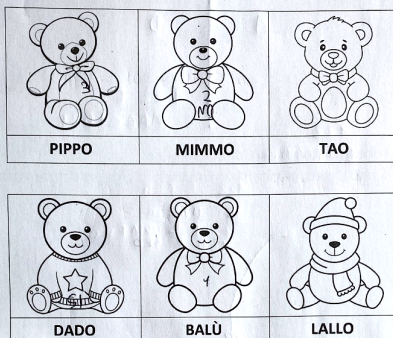
DOMANDA		AMBITO PREVALENTE																							
D24. Osserva questi orsacchiotti.  PIPP0  MIMMO  TAO  DADO  BALÙ  LALLO Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F). <table><thead><tr><th></th><th></th><th>V</th><th>F</th></tr></thead><tbody><tr><td>a.</td><td>MIMMO e DADO hanno la maglietta</td><td>☐</td><td>☐</td></tr><tr><td>b.</td><td>Almeno tre orsetti hanno il fiocco</td><td>☐</td><td>☐</td></tr><tr><td>c.</td><td>Solo LALLO ha il cappello</td><td>☐</td><td>☐</td></tr><tr><td>d.</td><td>Un solo orsetto ha la sciarpa</td><td>☐</td><td>☐</td></tr></tbody></table>				V	F	a.	MIMMO e DADO hanno la maglietta	☐	☐	b.	Almeno tre orsetti hanno il fiocco	☐	☐	c.	Solo LALLO ha il cappello	☐	☐	d.	Un solo orsetto ha la sciarpa	☐	☐	RELAZIONI E FUNZIONI			
				V	F																				
		a.	MIMMO e DADO hanno la maglietta	☐	☐																				
		b.	Almeno tre orsetti hanno il fiocco	☐	☐																				
		c.	Solo LALLO ha il cappello	☐	☐																				
d.	Un solo orsetto ha la sciarpa	☐	☐																						
DIMENSIONE																									
Argomentare																									
RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.																									
TRAGUARDO																									
Legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici																									
OBIETTIVO																									
Argomentare sui criteri che sono stati usati per realizzare classificazioni e ordinamenti assegnati																									
SCOPO DELLA DOMANDA																									
Stabilire la verità o falsità di affermazioni relative a informazioni fornite in una tabella contenente immagini e testo																									

RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE			
F ; V ; V ; V		Item	Mancante	Errata	Corretta
		D24	8,3%	50,9%	40,8%

COMMENTI E OSSERVAZIONI	
La domanda presenta le immagini e i nomi di sei orsacchiotti con accessori diversi (<i>fiocco, maglietta, cappello, sciarpa</i>) e richiede di stabilire la verità o la falsità di quattro affermazioni che concernono confronti tra gli orsacchiotti in relazione agli accessori che indossano. Le affermazioni coinvolgono alcuni aspetti logici, ovvero: la congiunzione (<i>MIMMO e DADO</i>), il quantificatore di esistenza (<i>Almeno tre orsetti</i>) e l'espressione "solo" (<i>Solo LALLO; Un solo orsetto</i>). La risposta è considerata corretta se sono corrette tutte le scelte operate. La prima affermazione (a) propone che <i>MIMMO e DADO hanno la maglietta</i>. Dalle immagini si può individuare facilmente che l'affermazione è falsa, poiché MIMMO indossa il fiocco ma non la maglietta, accessorio indossato invece da DADO. La seconda affermazione (b) riguarda il fatto che <i>Almeno tre orsetti hanno il fiocco</i>. L'affermazione è vera se il numero di orsacchiotti con il fiocco è maggiore o uguale a tre, cosa verificata dai quattro orsacchiotti che indossano il fiocco. La terza affermazione (c) sostiene che <i>Solo LALLO ha il cappello</i>. Per verificare che l'affermazione è vera occorre verificare una condizione di esclusività: non è sufficiente che LALLO porti il cappello, ma è necessario escludere che qualunque altro orsacchiotto porti il cappello. LALLO ha il cappello e nessun altro, dunque l'affermazione è vera. La quarta affermazione (d), infine, considera che <i>Un solo orsetto ha la sciarpa</i>. Il conteggio degli orsacchiotti che indossano la sciarpa dà come risultato uno, perché solo LALLO indossa la sciarpa, perciò l'affermazione è vera. Con i segni aggiunti sul foglio, il protocollo sotto esemplifica modalità di controllo per stabilire la falsità dell'affermazione: <i>MIMMO e DADO hanno la maglietta</i> e la verità di: <i>Almeno tre orsetti hanno il fiocco</i>. Il "NO" e il "SÌ" scritti rispettivamente sulla pancia di MIMMO e sulla pancia di DADO identificano la presenza della maglietta nel secondo orsacchiotto ma non nel primo. I numeri "1", "2" e "3" aggiunti nell'ordine su BALÙ, MIMMO e PIPPO indicano tre orsacchiotti con il fiocco, che sono abbastanza per	

concludere che almeno tre orsetti hanno il fiocco (vediamo l'attenzione alle parole "Almeno tre" sottolineate nella terza affermazione).

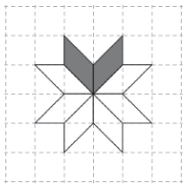
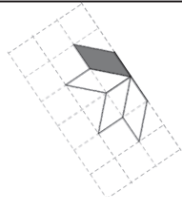
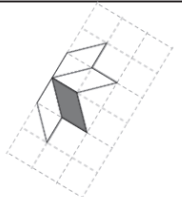
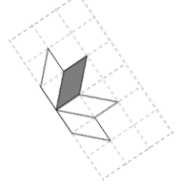
D24. Osserva questi orsacchiotti.



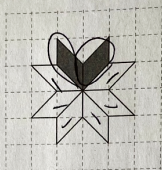
Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

	V	F
a. Un solo orsetto ha la sciarpa	☒	☐
b. Solo LALLO ha il cappello	☒	☐
c. <u>Almeno tre</u> orsetti hanno il fiocco	☒	☐
d. MIMMO e DADO hanno la maglietta	☐	☒

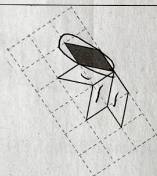
La percentuale di risposte errate è alta (circa 51%) verosimilmente in relazione alla comprensione degli aspetti logici coinvolti nel testo delle affermazioni.

DOMANDA		AMBITO PREVALENTE			
D25. Osserva questo disegno.  Puoi ricostruirlo con due di questi pezzi.  Pezzo A  Pezzo B  Pezzo C  Pezzo D Con quali pezzi puoi ricostruire il disegno? Risposta: con il Pezzo e con il Pezzo		SPAZIO E FIGURE			
		DIMENSIONE			
		Conoscere			
		RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.			
		TRAGUARDO Riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo OBIETTIVO <i>Riconoscere, denominare e descrivere figure geometriche</i>			
		SCOPO DELLA DOMANDA			
		Individuare le due figure simmetriche la cui composizione dà una figura data			
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE			
con il Pezzo A e con il Pezzo D oppure con il Pezzo D e con il Pezzo A		Item	Mancante	Errata	Corretta
		D25	6,3%	28,8%	65,0%
COMMENTI E OSSERVAZIONI					
La domanda richiede di individuare, tra quattro figure (pezzi), le due figure che permettono di ricomporre il poligono mostrato all'inizio. Questo poligono, disegnato su una griglia quadrettata, è formato da 8 parallelogrammi, due dei quali sono colorati di grigio e disposti nella parte superiore, in posizioni simmetriche rispetto all'asse verticale della figura. I pezzi sono mostrati in una posizione non standard, anch'essi su parte della griglia quadrettata. Queste variabili rendono il compito non un puro riconoscimento di forme: è infatti necessario immaginare due pezzi ruotati e affiancati in verticale per verificare che il risultato corrisponda al modello nel complesso delle sue proprietà, in particolare che si mantenga il rapporto di simmetria rispetto all'asse verticale tra i due pezzi. La griglia e le parti grigie fungono qui da strumenti di controllo. Il Pezzo B e il Pezzo C presentano lo stesso numero di punte bianche dei Pezzi corretti A e D, differendo da questi soltanto per la posizione del parallelogramma grigio. Strategie di ragionamento efficaci includono la necessità di mantenere il controllo sulla posizione dei vari parallelogrammi, anche mediante l'attribuzione di segni sul foglio che aiutano a stabilire corrispondenze o collegamenti tra le figure in gioco, come la posizione consecutiva di tre parallelogrammi bianchi in ciascuno dei due pezzi cercati. I protocolli che seguono offrono due esempi.					

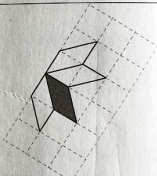
D5. Osserva questo disegno.



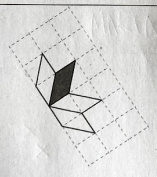
Puoi ricostruirlo con due di questi pezzi.



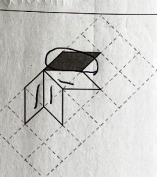
Pezzo A



Pezzo B

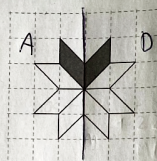


Pezzo C

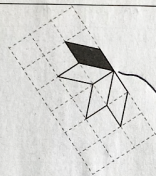


Pezzo D

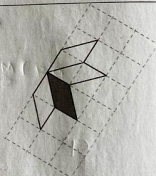
D25. Osserva questo disegno.



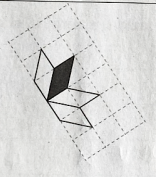
Puoi ricostruirlo con due di questi pezzi.



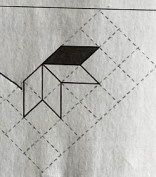
Pezzo A



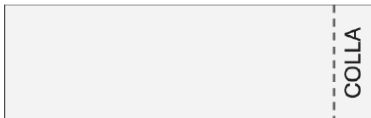
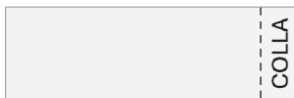
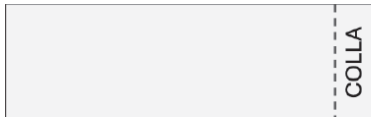
Pezzo B



Pezzo C

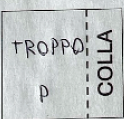


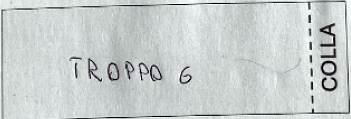
Pezzo D

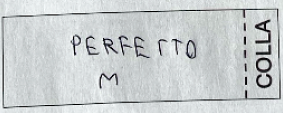
DOMANDA		AMBITO PREVALENTE				
D26. Osserva il gatto costruito da Mattia.  Per costruire il gatto, Mattia ha tagliato, arrotolato e incollato due strisce di carta. Per costruire il corpo ha usato una striscia come questa:  Quale striscia ha usato per costruire la testa? A. ☐  B. ☐  C. ☐ 		SPAZIO E FIGURE				
		DIMENSIONE				
		Risolvere problemi				
		RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.				
		TRAGUARDO Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati. Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria OBIETTIVO <i>Disegnare figure geometriche e costruire modelli materiali anche nello spazio</i>				
		SCOPO DELLA DOMANDA Determinare la rappresentazione bidimensionale di un modello tridimensionale a partire da un’immagine del modello				
RISPOSTA CORRETTA		RISULTATI CAMPIONE				
A	Item	Mancante	A	B	C	
	D26	4,4%	50,3%	31,1%	14,2%	
COMMENTI E OSSERVAZIONI						
La domanda presenta nello stimolo l’immagine di un <i>gatto</i> costruito con <i>due strisce di carta</i>, una per la <i>testa</i> e una per il <i>corpo</i>. È richiesto di determinare, tra tre strisce rettangolari, quella le cui dimensioni rispettano le proporzioni della <i>testa</i> cilindrica del gatto rispetto al corpo, conoscendo la striscia rettangolare utilizzata per il corpo (anch’essa fornita nello stimolo). Per rispondere alla domanda, scegliendo l’opzione A, è necessario mettere a confronto la striscia utilizzata per il corpo con le strisce nelle tre opzioni di risposta, facendo riferimento alla relazione tra il corpo e la testa cilindrici del gatto nell’immagine. È inoltre importante prestare attenzione al fatto che, nel passaggio dalla striscia rettangolare al cilindro, la lunghezza della striscia diviene la circonferenza del cilindro mentre la larghezza (o altezza) della striscia diviene l’altezza del cilindro. L’opzione di risposta B presenta una striscia rettangolare identica a quella utilizzata per realizzare il corpo, che presupporrebbe che la testa del gatto abbia le stesse dimensioni del corpo. L’opzione di risposta C considera invece una striscia molto più corta rispetto a quella del corpo, che una volta arrotolata darebbe luogo a una testa cilindrica molto stretta rispetto a quella tondeggiante e proporzionata visibile nell’immagine del gatto. Queste caratteristiche delle opzioni di risposta permettono di procedere per esclusione sulla scelta dell’opzione corretta. I protocolli che seguono forniscono esempi di strategie di ragionamento efficaci in tale direzione. A sinistra, le scritte “<i>TROPPO P</i>” (troppo piccola), “<i>TROPPO G</i>” (troppo grande) e “<i>PERFETTO M</i>” (media) apposte sulle tre strisce evidenziano chiaramente che cosa non funziona nelle opzioni scartate. A destra, la striscia con la medesima lunghezza di quella fornita, identificata da una linea verticale che le unisce, è scartata (“<i>UGUALI NO</i>” e “<i>NO</i>” di fianco all’opzione di risposta) assieme a						

quella più stretta ("NO TROPPO PICCOLA"). La scelta ricade così sulla striscia di lunghezza intermedia ("SI MEDIA").

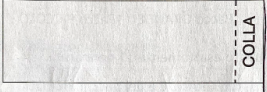
Quale striscia ha usato per costruire la testa?

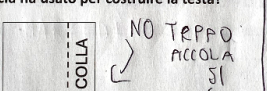
A. ☐ 

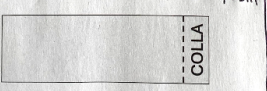
B. ☐ 

C. ☒ 

Quale striscia ha usato per costruire la testa?

A. ☐ 

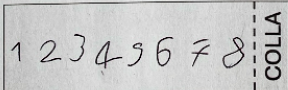
B. ☒ 

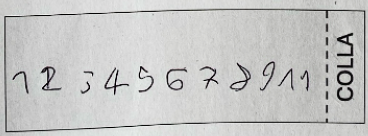
C. ☐ 

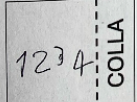
Handwritten notes: NO TROPPO PICCOLA, SI MEDIA, UGUALI NO, NO

Altre strategie di ragionamento efficaci consistono nel confronto tra le lunghezze delle strisce mediante l'introduzione di sequenze di numeri come modalità percettiva per misurare, con una stima, lo spazio a disposizione (come si evince dai protocolli sotto).

Quale striscia ha usato per costruire la testa?

A. ☒ 

B. ☐ 

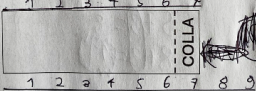
C. ☐ 

Per costruire il corpo ha usato una striscia come questa:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Quale striscia ha usato per costruire la testa?

A. ☐ 

B. ☒ 

C. ☐ 

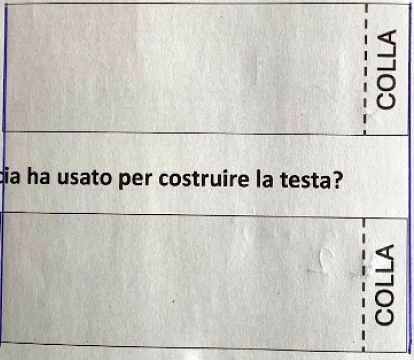
Handwritten notes: NO, NO

Nel protocollo a sinistra, i numeri introducono un'unità di misura arbitraria ripetuta in modo che, a occhio, i numeri risultino egualmente spazati all'interno delle strisce, portando a lunghezze di circa 8, 11 e 4 unità che inducono a scegliere l'opzione di lunghezza intermedia. Nell'esempio a destra, cambia solo la spaziatura dei numeri ma il ragionamento procede in modo analogo con il confronto tra lunghezze di 3, 7 e 9 unità (inclusa quella della striscia utilizzata per il corpo). Nuovamente le opzioni alle estremità sono scartate (e indicate con un "NO").

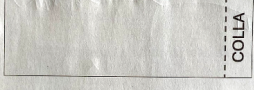
I protocolli seguenti mostrano infine tipiche difficoltà legate a una percezione erronea della grandezza della testa nell'immagine del gatto in relazione alla grandezza del corpo.

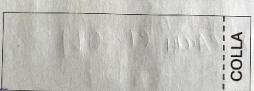
Per costruire il corpo ha usato una striscia come questa:

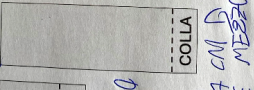
Quale striscia ha usato per costruire la testa?

A. ☒ 

Quale striscia ha usato per costruire la testa?

A. ☐ 

B. ☐ 

C. ☒ 

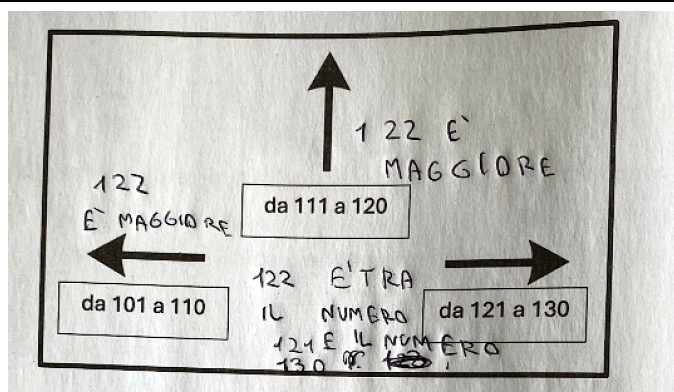
Handwritten notes: 9 CM, 9 CM, 7 CM, 8 CM, 9 CM, MEZZO

Nell'esempio a sinistra, è scelta la striscia che ha la stessa lunghezza di quella utilizzata per il corpo, una volta che le due lunghezze sono state messe in relazione con due linee verticali a collegarne le estremità (come se la testa del gatto fosse percepita delle medesime dimensioni del corpo; notiamo che si tratta di una percezione abbastanza diffusa, vista la percentuale 31,1% di risposte di questo tipo).

Nell'esempio a destra, è invece scelta la striscia che ha lunghezza "3 CM E MEZZO" (che è verosimile sia stata misurata con un righello) e sono state scartate le strisce di lunghezze "7 CM E MEZZO" e "9 CM" (come se la testa del gatto fosse percepita molto più piccola rispetto al corpo).

[illegible]

A. ☒	 da 121 a 130	$121 < 122 \checkmark$ $130 > 122 \checkmark$
B. ☐	 da 101 a 110	$101 < 122 \times$ $110 < 122 \times$
C. ☐	 da 111 a 120	$111 < 122 \times$ $120 < 122 \times$



122 È MAGGIORE

122 È MAGGIORE

122 È TRA IL NUMERO 121 E IL NUMERO 130

Nel protocollo a sinistra, per ciascuna opzione di risposta compare il doppio confronto. Per l'opzione scelta (da 121 a 130) i confronti sono entrambi validati sul lato destro del foglio: " $121 < 122 \checkmark$ " e " $130 > 122 \checkmark$ ". Per le due opzioni scartate compare invece un unico segno di esclusione, una "X", a fianco di " $101 < 122$ " e " $110 < 122$ ", nel caso della prima, e a fianco di " $111 < 122$ " e " $120 < 122$ " nel caso della seconda.

Nell'esempio a destra, è il linguaggio a verbalizzare il confronto. Le frecce scartate (verso sinistra e verso l'alto) sono accompagnate dalla frase "122 È MAGGIORE" per indicare che 122 supera l'estremo superiore di entrambi gli intervalli numerici. Accanto alla freccia scelta, la frase "122 È TRA IL NUMERO 121 E IL NUMERO 130" esplicita che entrambe le condizioni sono quindi soddisfatte.

DOMANDA					AMBITO PREVALENTE																																
D28. La tabella mostra le città visitate da alcuni bambini la scorsa estate. La tabella non è completa, mancano queste informazioni: • Giulia ha visitato anche Milano • Franco ha visitato anche Napoli Completa tu la tabella con le crocette che mancano. <table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>MILANO</td><td>VENEZIA</td><td>FIRENZE</td><td>NAPOLI</td></tr><tr><td>Giulia</td><td></td><td></td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Marco</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr><tr><td>Greta</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td>X</td></tr><tr><td>Franco</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td></td></tr></table>										MILANO	VENEZIA	FIRENZE	NAPOLI	Giulia			X		Marco		X			Greta	X		X	X	Franco		X	X		DATI E PREVISIONI			
																																					
					MILANO	VENEZIA	FIRENZE	NAPOLI																													
					Giulia			X																													
					Marco		X																														
Greta	X		X	X																																	
Franco		X	X																																		
DIMENSIONE																																					
Risolvere problemi																																					
RIFERIMENTI INDICAZIONI NAZ.																																					
TRAGUARDO																																					
Ricerca dati per ricavare informazioni e costruisce rappresentazioni (tabelle e grafici). Ricava informazioni anche da dati rappresentati in tabelle e grafici																																					
OBIETTIVO																																					
Leggere e rappresentare relazioni e dati con diagrammi, schemi e tabelle																																					
SCOPO DELLA DOMANDA																																					
Completare una tabella a doppia entrata a partire dalle informazioni espresse in un testo																																					

RISPOSTA CORRETTA					RISULTATI CAMPIONE																												
<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>MILANO</td><td>VENEZIA</td><td>FIRENZE</td><td>NAPOLI</td></tr><tr><td>Giulia</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>Marco</td><td></td><td>X</td><td></td><td></td></tr><tr><td>Greta</td><td>X</td><td></td><td>X</td><td>X</td></tr><tr><td>Franco</td><td></td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr></table>						MILANO	VENEZIA	FIRENZE	NAPOLI	Giulia	X		X		Marco		X			Greta	X		X	X	Franco		X	X	X	Item	Mancante	Errata	Corretta
																																	
	MILANO	VENEZIA	FIRENZE	NAPOLI																													
	Giulia	X		X																													
	Marco		X																														
Greta	X		X	X																													
Franco		X	X	X																													
D28	13,6%	13,3%	73,1%																														

COMMENTI E OSSERVAZIONI				
La domanda presenta una tabella a doppia entrata con i nomi di quattro bambini sulle righe e di quattro città sulle colonne, già compilata in modo parziale con alcune crocette che indicano <i>le città visitate da alcuni bambini</i>. A differenza di situazioni in cui la tabella è completa e si tratta di estrarne informazioni, qui il compito richiede di ragionare all'inverso, associando le informazioni fornite con due affermazioni (<i>Giulia ha visitato anche Milano, Franco ha visitato anche Napoli</i>) alla loro collocazione nella tabella, con l'inserimento delle crocette corrispondenti a completare la rappresentazione, individuando per ciascuna l'incrocio tra la riga del bambino nominato e la colonna della città indicata. Il nodo per operare il completamento risiede nel significato additivo della parola "anche": in entrambi i casi, l'informazione nuova si aggiunge a quelle già presenti in tabella, senza sostituirla. In corrispondenza della riga di Giulia infatti è già presente una crocetta (Firenze) e in quella di Franco ne sono presenti due (Venezia e Firenze). Si tratta dunque di aggiungere una crocetta sulla rispettiva riga in corrispondenza della nuova città. Una possibile difficoltà si lega alla comprensione del testo, poiché non riconoscere il valore additivo può indurre a cancellare o a sovrascrivere la crocetta preesistente, interpretando la nuova informazione come sostitutiva di quella già disponibile. Un ulteriore elemento di difficoltà coinvolge la distinzione tra Giulia e Greta: i due nomi condividono l'iniziale e una struttura sillabica simile. Intendendo completare la riga di Giulia con la crocetta su Milano può accadere di apporla erroneamente sulla riga di Greta, che peraltro ha già una crocetta in quella colonna: la cella risulta già marcata e può così indurre a passare oltre. Anche la doppia richiesta di completamento sia della riga di Giulia sia di quella di Franco può costituire una fonte di difficoltà, per la necessità di mantenere il controllo su entrambe le informazioni insieme. La domanda presenta la percentuale 13,6% di risposte mancanti. Si tratta della percentuale più alta nell'intera prova per le risposte omesse: dato rilevante, che può essere associato alla richiesta poco non standard di riempimento della tabella a doppia entrata.				